mathematics vision project

Transforming Mathematics Education

SECUNDARIA MATEMATICAS DOS

Un Enfoque Integrado

MODULO 3

Resolver Ecuaciones Cuadráticas y otros Tipos de Ecuaciones

MATHEMATICSVISIONPROJECT.ORG

The Mathematics Vision Project

Scott Hendrickson, Joleigh Honey, Barbara Kuehl, Travis Lemon, Janet Sutorius

MÓDULO 3 – TABLA DE CONTENIDO

Resolver Ecuaciones Cuadráticas y otros Tipos de Ecuaciones

también las raíces de funciones cuadráticas (A.REI.4, A.CED.4)
PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Tarea: Resolver ecuaciones cuadráticas y otros tipos de ecuaciones 3.5

3.6 Rivalidad en el Borde de la Banqueta – *Actividad para Consolidar Comprensión*
Examinar cómo las diferentes formas de una expresión cuadrática pueden facilitar la solución de ecuaciones cuadráticas. (A.REI.4, A.REI.7, A.CED.1, A.CED.4)
PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Tarea: Resolver ecuaciones cuadráticas y otros tipos de ecuaciones 3.6

3.7 Perfeccionando mis *Quads* – Actividad para Consolidar Comprensión
Llegar a ser competentes en la resolución de ecuaciones cuadráticas (A.REI.4, A.REI.7, A.CED.1, A.CED.4)
PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Tarea: Resolver ecuaciones cuadráticas y otros tipos de ecuaciones 3.7

3.8 Por Determinarse – Actividad para Desarrollar Comprensión
Descubriendo la necesidad de un número complejo como soluciones para algunas ecuaciones cuadráticas (A.REI.4, N.CN.7, N.CN.8, N.CN.9)
PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Tarea: Resolver ecuaciones cuadráticas y otros tipos de ecuaciones 3.8

3.9 Mis amigos Irracionales e Imaginarios – *Actividad para Consolidar Comprensión*
Extensión de los sistemas numéricos reales y complejos (N.RN.3, N.CN.1, N.CN.2, N.CN.7, N.CN.8, N.CN.9)
PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Tarea: Resolver ecuaciones cuadráticas y otros tipos de ecuaciones 3.9

3.10 Números Reales y Complejos – Actividad para Practicar Comprensión
Examinar la aritmética de los números reales y complejos (N.RN.3, N.CN.1, N.CN.2, A.APR.1)
PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Tarea: Resolver ecuaciones cuadráticas y otros tipos de ecuaciones 3.10

3.11H Dificultades Cuadráticas – Actividad para Desarrollar y Consolidar Comprensión
Resolviendo desigualdades cuadráticas (A.SSE.1, A.CED.1, HS Modelando forma estándar)
PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Tarea: Resolver ecuaciones cuadráticas y otros tipos de ecuaciones 3.11H

3.12H Cálculos Complejos – Actividad para Consolidar Comprensión
Representando la aritmética de los números complejos en el plano complejo (N.CN.3, N.CN.4, N.CN.5, N.CN.6)
PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Tarea: Ecuaciones cuadráticas 3.12H

3.13H ¡Todos los Sistemas Funcionan! – Actividad para Consolidar Comprensión
Resolver sistemas de ecuaciones usando matrices inversas. (A.REI.8, A.REI.9)
PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Tarea: Ecuaciones cuadráticas 3.13H

3.1 Los Intermedios

Actividad para Desarrollar Comprensión

Ahora que has visto que hay contextos para funciones exponenciales continuas, es una buena idea comenzar a pensar en los números que completan los valores como 2^2 y 2^3 en una función exponencial. Estos números son bastante interesantes, por lo que vamos a hacer un poco de exploración en esta tarea para ver qué podemos averiguar sobre estos "intermedios".

Comencemos en un lugar familiar:

1. Completa la siguiente tabla.

x	0	1	2	3	4
$f(x) = 4 \cdot 2^x$	4				

2. Grafica estos puntos en la gráfica al final de esta tarea y dibuja la gráfica de $f(x)$.

Digamos que queremos crear una tabla con más entradas, tal vez con un punto a medio camino entre cada uno de los puntos en la tabla de arriba. Hay algunas maneras en que podemos pensar al respecto. Comenzaremos por dejar que nuestro amigo Travis explique su método.

Travis hace la siguiente afirmación:

"Si la función se duplica cada vez que x sube 1, la mitad de ese crecimiento se produce entre 0 y ½ y la otra mitad entre ½ y 1. Entonces, por ejemplo, podemos encontrar la salida en x = ½ al encontrar el promedio de las salidas en x = 0 and x = 1".

3. Completa las partes de la tabla a continuación que ya hayas calculado, y luego decide cómo puedes usar la estrategia de Travis para completar los datos faltantes. Traza también los datos de Travis en la gráfica al final de la tarea.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
$f(x)$	4								

4. Comenta la idea de Travis. ¿Cómo se compara con la tabla generada en el problema 1? ¿Para qué tipo de función serviría este razonamiento?

Miriam sugiere que deben completar los datos en la tabla de la siguiente manera:

"Noté que la función aumenta por el mismo factor cada vez que x sube 1, y creo que esto es como lo que hicimos en matemáticas el año pasado. A mí me parece que esta propiedad debería conservarse también en cada medio intervalo ".

5. Completa las partes de la tabla a continuación que ya calculaste en el problema 1 y luego decide cómo puedes usar la idea de Miriam para completar los datos faltantes. Como en la tabla en el problema 1, cada entrada debe multiplicarse por algún factor constante para obtener la siguiente entrada, y ese factor debería producir los mismos resultados que los que ya se registraron en la tabla. Utiliza este factor constante para completar la tabla. También traza los datos de Miriam en la gráfica al final de esta tarea.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
$f(x)$	4								

6. ¿Qué pasaría si Miriam quisiera encontrar valores para la función cada tres tercios del intervalo en lugar de cada mitad? ¿Qué factor constante usaría para ser consistente con la función de duplicar cuando x aumenta en 1? Usa este multiplicador para completar la siguiente tabla.

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	3
$f(x)$	4									

7. ¿Qué número utilizaste como factor constante para completar la tabla en el problema 5?

8. ¿Qué número utilizaste como factor constante para completar la tabla en el problema 6?

9. Da una descripción detallada de cómo estimarías el valor de salida $f(x)$, para $x = \frac{5}{3}$.


65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
-1
1
2
3
4
5

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO | Nombre | Periodo | Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Comparación de patrones aditivos y multiplicativos

Las secuencias a continuación ejemplifican un patrón aditivo (aritmético) o multiplicativo (geométrico). Identifica el tipo de secuencia, completa los valores que faltan en la tabla y escribe una ecuación.

1.

Término	1°.	2°.	3°.	4°.	5°.	6°.	7°.	8°.
Valor	2	4	8	16	32			

a. Tipo de secuencia: b. Ecuación:

2.

Término	1°.	2°.	3°.	4°.	5°.	6°.	7°.	8°.
Valor	66	50	34	18				

a. Tipo de secuencia: b. Ecuación:

3.

Término	1°.	2°.	3°.	4°.	5°.	6°.	7°.	8°.
Valor	-3	9	-27	81				

a. Tipo de secuencia: b. Ecuación:

4.

Término	1°.	2°.	3°.	4°.	5°.	6°.	7°.	8°.
Valor	160	80	40	20				

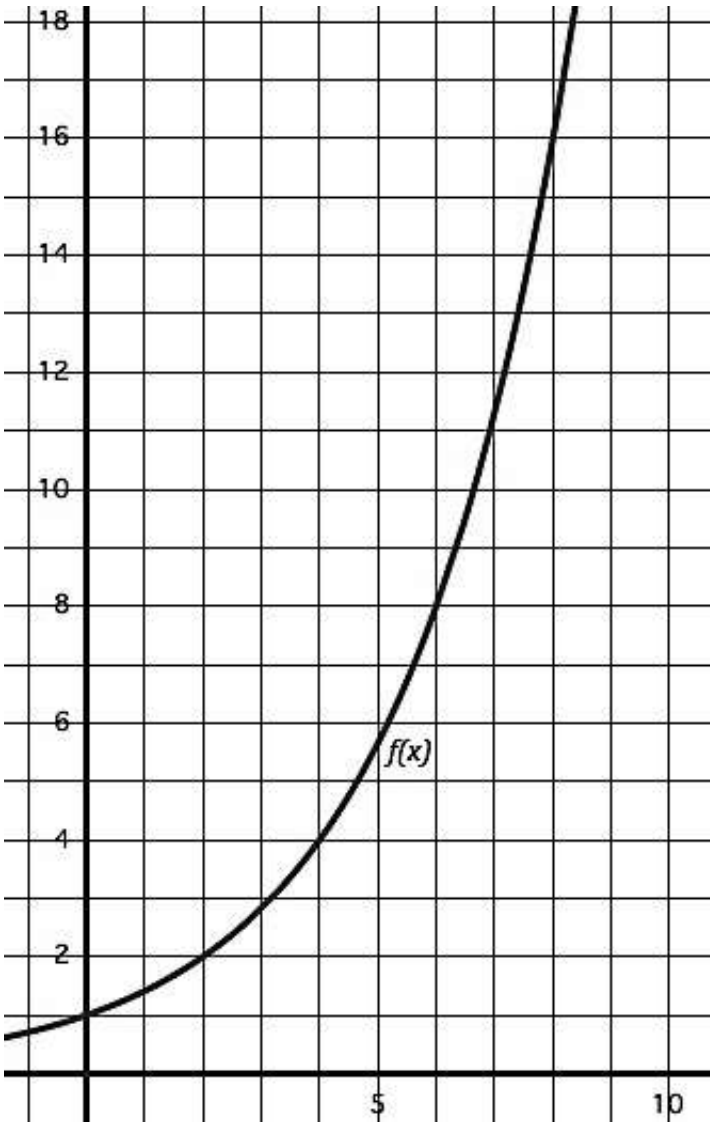
a. Tipo de secuencia: b. Ecuación:

5.

Término	1°.	2°.	3°.	4°.	5°.	6°.	7°.	8°.
Valor	-9	-2	5	12				

a. Tipo de secuencia: b. Ecuación:

Usa la gráfica de la función para encontrar los valores deseados. También crea una ecuación explícita para la función.



6. Encuentra el valor de $f(2)$

7. Encuentra donde $f(x) = 4$

8. Encuentra el valor de $f(6)$

9. Encuentra donde $f(x) = 16$

10. ¿Qué notas sobre la forma en que se relacionan las entradas y salidas para esta función? (Crea una tabla de entradas y salidas, si es necesario).

11. ¿Cuál es la ecuación explícita para esta función?

PRÁCTICA

Tema: Evaluar las expresiones con exponentes racionales

Completa los valores faltantes de la tabla según el crecimiento que se describe.

12. El crecimiento en la tabla es triple cada año completo.

Años	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
Bacteria	2		6						

13. El crecimiento en la tabla es triple cada año completo.

Años	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$
Bacteria	2			6					

14. Los valores en la tabla se incrementan por un factor de cuatro cada año completo.

Años	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
Bacteria	2		8						

RENDIMIENTO

Tema: Simplificar exponentes

Simplifica las siguientes expresiones utilizando reglas y relaciones de exponentes, escribe tus respuestas en forma exponencial. (Por ejemplo: $2^2 \cdot 2^5 = 2^7$)

15. $3^2 \cdot 3^5$

16. $\frac{5^3}{5^2}$

17. 2^{-5}

18. 17^0

19. $\frac{7^5}{7^2} \cdot \frac{7^3}{7^4}$

20. $\frac{3^{-2} \cdot 3^5}{3^7}$

Need help? Visit **www.rsgsupport.org**

3.2 Mitad del Interés

Actividad para Consolidar Comprensión

Carlos y Clarita, los gemelos Martínez, han dirigido un negocio de verano todos los años durante los últimos cinco años. Con su primer negocio, un puesto de limonada en el vecindario, obtuvieron una pequeña ganancia que su padre insistió en depositar en una cuenta de ahorros en el banco local. Cuando la familia Martínez se mudó unos meses más tarde, los gemelos decidieron dejar el dinero en el banco, donde ha estado ganando un 5% de interés anualmente. Carlos recordó el dinero cuando encontró el estado de cuenta bancario anual, que habían recibido por correo.

"¿Recuerdas cómo papá dijo que podríamos retirar este dinero del banco cuando tengamos veinte años?" dijo Carlos a Clarita. "Tenemos $ 382.88 en la cuenta ahora. Me pregunto cuánto tendremos en los próximos cinco años ".

1. Dados los hechos enumerados anteriormente, ¿cómo pueden los gemelos determinar cuánto habrá en la cuenta dentro de cinco años, cuando tengan veinte años? Describe tu estrategia y calcula el saldo de la cuenta.

2. Carlos calcula cuánto habrá en la cuenta un año a la vez. Acaba de terminar de calcular cuánto habrá durante los primeros cuatro años. Describe cómo puede encontrar el saldo del próximo año y registra ese valor en la tabla.

año	cantidad
0	382.88
1	402.02
2	422.12
3	443.23
4	465.39
5	

3. Clarita piensa que Carlos es tonto al calcular el valor de la cuenta un año a la vez, y dice que podría haber escrito una fórmula para el año *n,* y luego evaluar su fórmula cuando $n = 5.$ Escribe la fórmula de Clarita para el año *n*, y úsala para encontrar el saldo de la cuenta al final del 5° año.

4. Carlos se sorprendió de que la fórmula de Clarita diera el mismo saldo de la cuenta que su estrategia año por año. Explica de una manera que convenza a Carlos, por qué esto es así.

"No recuerdo cuánto dinero ganamos ese verano", dijo Carlos. "Me pregunto si podemos averiguar cuánto depositamos en la cuenta hace cinco años, conociendo el saldo de la cuenta ahora".

5. Carlos continuó usando su estrategia para ir cinco años atrás, año tras año. Explica lo que piensas que Carlos está haciendo para encontrar sus valores un año a la vez, y continúa llenando la tabla hasta llegar a -5, que Carlos usa para representar "hace cinco años."

6. Clarita evaluó su fórmula para n = -5. Nuevamente, Carlos se sorprende de que obtengan los mismos resultados. Explica por qué funciona el método de Clarita.

año	cantidad
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	364.65
0	382.88
1	402.02
2	422.12
3	443.23
4	465.39
5	

Clarita no cree que dejar el dinero en el banco por otros cinco años sea una gran idea, y sugiere que inviertan el dinero en su próximo negocio de verano, *Rivalidad en el Borde de la Banqueta* (que, por ahora, mantienen en secreto, incluidos sus amigos). "Tendremos algunos costos iniciales, y esto los pagará sin tener que retirar dinero de nuestras otras cuentas".

Carlos comentó: "Pero retiraremos nuestro dinero a mitad del año. ¿Crees que perderemos en el interés de este año? "

"No, nos pagarán una parte de nuestro interés por medio año", respondió Clarita.

"Pero, ¿cuánto será eso?", Preguntó Carlos.

7. Calcula el saldo de la cuenta y cuánto interés piensas que el banco debe pagarle a Carlos y Clarita si retiran su dinero a la ½ del año a partir de ahora. Recuerda que actualmente tienen $382.88 en la cuenta, y que reciben 5% de interés anualmente. Describe tu estrategia.

Carlos utilizó la siguiente estrategia: Calculó cuánto interés deberían pagarle durante un año completo, encontró la mitad de eso y agregó esa cantidad al saldo de la cuenta corriente.

Clarita usó esta estrategia: Ella sustituyó ½ por *n* en la fórmula $A = 382.88(1.05)^n$ y registró esto como el saldo de la cuenta.

8. Esta vez Carlos y Clarita no obtuvieron el mismo resultado. ¿Con qué método estás de acuerdo y por qué?

Clarita está tratando de convencer a Carlos de que su método es correcto. "Las reglas exponenciales son multiplicativas, no aditivas. Mira tu tabla otra vez. Ganaremos $ 82.51 en intereses durante los próximos cuatro años. Si tu método funcionara, deberíamos poder tomar la mitad de esa cantidad, agregarla al monto que tenemos ahora y obtener el saldo de la cuenta que deberíamos tener en dos años, pero no da ese resultado ".

9. Realiza los cálculos que sugirió Clarita y compara el resultado del año 2 de su estrategia con la estrategia que Carlos utilizó originalmente para completar la tabla.

10. Los puntos de la tabla de Carlos (ver pregunta 2) han sido graficados en la gráfica al final de esta tarea, junto con la función de Clarita. Traza el valor que calculaste en la pregunta 9 en esta misma gráfica. ¿Qué revela la gráfica sobre las diferencias en las dos estrategias de Carlos?

11. Ahora traza los valores de Clarita y Carlos por ½ año (ve la pregunta 8) en esta misma gráfica.

"Tu punto de datos parece ajustarse mejor a la forma de la gráfica que el mío", admitió Carlos, "pero no entiendo cómo podemos usar ½ como exponente". ¿Cómo encuentra eso el factor correcto por el que necesitamos multiplicar? En tu fórmula, escribir $(1.05)^5$ significa multiplicar 1.05 cinco veces, y escribir $(1.05)^{-5}$ significa dividir 1.05 cinco veces, pero ¿qué significa $(1.05)^{1/2}$? "

Clarita no estaba muy segura de cómo responder la pregunta de Carlos, pero tenía algunas preguntas propias. Ella decidió apuntarlas, incluyendo la pregunta de Carlos:

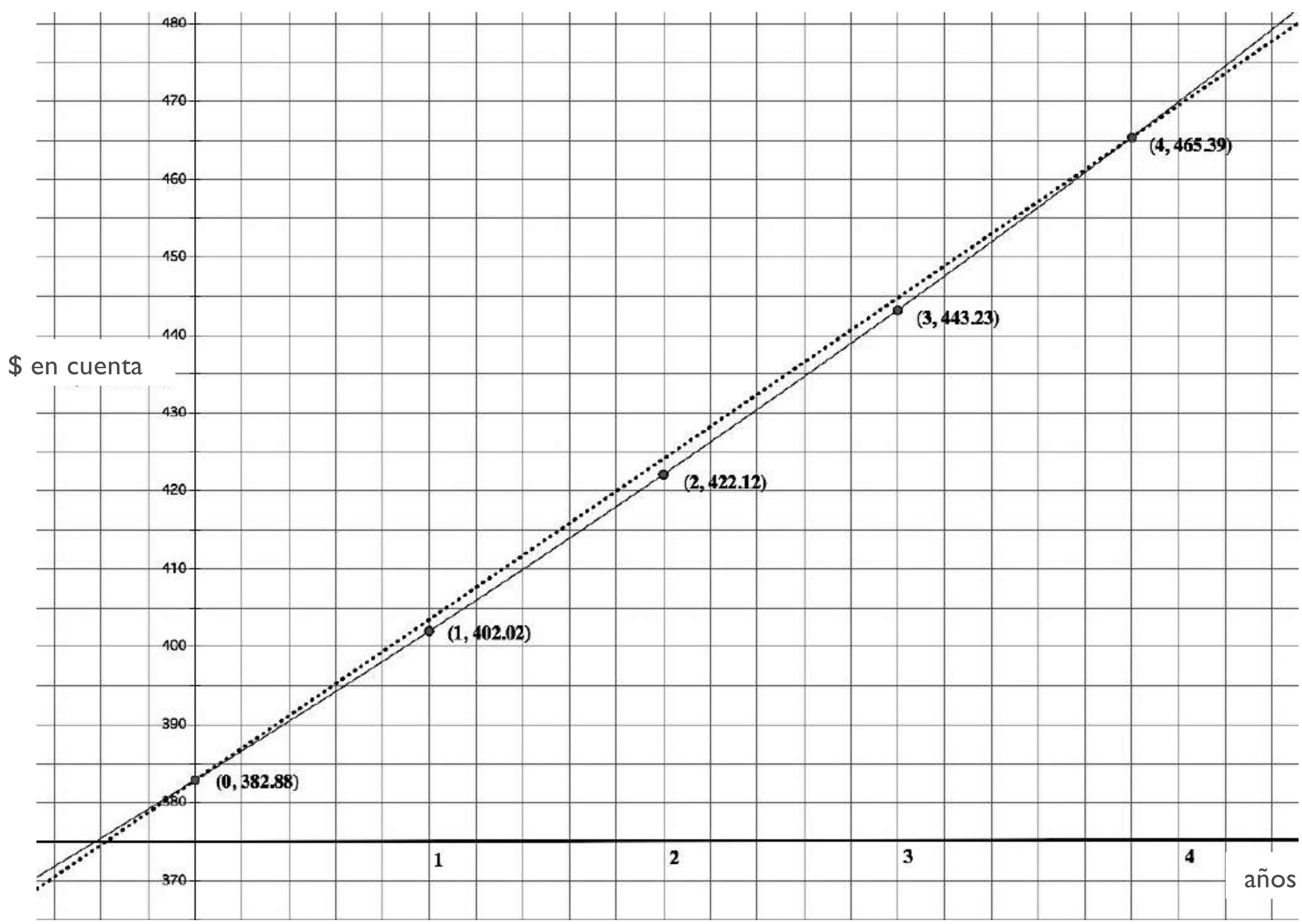
- ¿Por qué cantidad numérica multiplicamos cuando usamos como factor $(1.05)^{1/2}$?
- ¿Qué pasa si multiplicamos $(1.05)^{1/2}$ y luego volvemos a multiplicar los resultados por $(1.05)^{1/2}$? ¿No debería ser eso un año completo de interés? ¿Lo es?
- ¿Si multiplicamos $(1.05)^{1/2} \cdot (1.05)^{1/2}$ es lo mismo que multiplicar por 1.05, ¿qué sugiere eso sobre el valor de $(1.05)^{1/2}$?

12. Responde cada una de las preguntas de Clarita mencionadas arriba lo mejor que puedas.

Mientras Carlos reflexiona sobre este trabajo, Clarita nota la fecha en el estado de cuenta bancario que inició esta conversación. "¡Este estado de cuenta bancario es de hace tres meses!", exclama. "Eso significa que el banco nos debe ¾ de un año de interés".

"Entonces, ¿cuánto interés nos deberá el banco en ese momento?", preguntó Carlos.

13. Encuentra tantas formas como puedas para responder la pregunta de Carlos: ¿Cuánto valdrá su cuenta en ¾ de un año (nueve meses) si gana el 5% anual y actualmente tienen $ 382.88?



PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Simplificar radicales

Una expresión radical muy común es una raíz cuadrada. Una forma de pensar en una raíz cuadrada es: es el número que se multiplicará por sí mismo para crear un valor deseado. Por ejemplo: $\sqrt{2}$ *es el número que se multiplicará por sí mismo para igualar 2. De la misma manera* $\sqrt{16}$ *es el número que se multiplicará por sí mismo para ser igual a 16. En este caso, el valor es 4 porque 4 x 4 = 16. (Cuando se toma la raíz cuadrada de un número cuadrado, obtienes un buen valor de número entero. De lo contrario, se produce un número irracional).*

Este mismo patrón es válido para otros radicales como las raíces cúbicas y las raíces cuarta, y así sucesivamente. Por ejemplo: $\sqrt[3]{8}$ *es el número que se multiplicará por sí mismo tres veces para igualar 8. En este caso, es igual al valor de 2 porque* 2^3 *= 2 x 2 x 2 = 8.*

Con esto en mente, los radicales pueden simplificarse. Ve los ejemplos a continuación.

Ejemplo 1: Simplifica $\sqrt{20}$	*Ejemplo 2*: Simplifica $\sqrt[5]{96}$
$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$	$\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = 2\sqrt[5]{3}$

Simplifica a cada uno de los radicales.

1. $\sqrt{40}$
2. $\sqrt{50}$
3. $\sqrt[3]{16}$
4. $\sqrt{72}$
5. $\sqrt[4]{81}$
6. $\sqrt{32}$
7. $\sqrt[5]{160}$
8. $\sqrt{45}$
9. $\sqrt[3]{54}$

PRÁCTICA

Tema: Encontrar los promedios aritméticos y geométricos y dar sentido a los exponentes racionales

Es posible que hayas encontrado los promedios aritméticos y geométricos en tu trabajo anterior. Encontrar promedios aritméticos y geométricos requiere encontrar valores de una secuencia entre valores dados y términos no consecutivos. En cada una de las siguientes secuencias, determina los promedios y muestra cómo los encontraste.

Encuentra los promedios aritméticos de las tareas al calce. Muestra tu trabajo.

10.

x	1	2	3
y	5		11

11.

x	1	2	3	4	5
y	18				-10

12.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	12						-6

Encuentra los promedios geométricos de las tareas al calce. Muestra tu trabajo.

13.

x	1	2	3
y	3		12

14.

x	1	2	3	4
y	7			875

15.

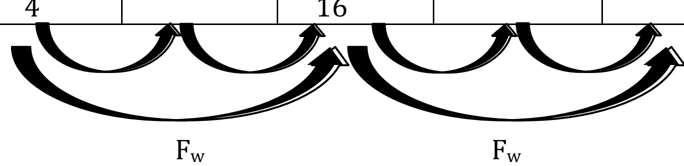
x	1	2	3	4	5	6
y	4					972

Completa las tablas de valores y encuentra el factor utilizado para moverse entre los valores de números enteros, F_w, así como el factor, F_c, que se usa para moverse entre cada columna de la tabla.

16.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	4		16		

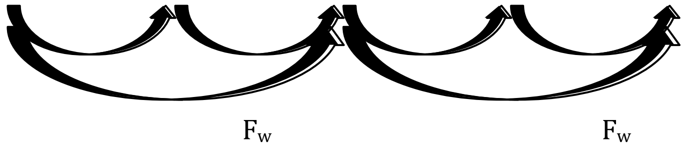
d. $F_w =$
e. $F_c =$



17.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	4		8		

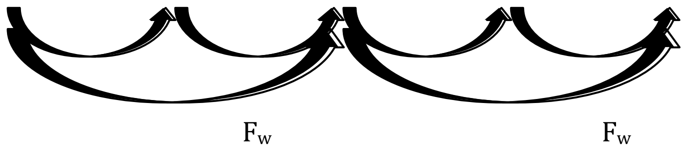
d. $F_w =$
e. $F_c =$



18.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	5		15		

d. $F_w =$
e. $F_c =$



RENDIMIENTO

Tema: Simplificar exponentes

Encuentra los valores deseados para cada función a continuación

19. $f(x) = 2x - 7$

Encuentra $f(-3)$

Encuentra $f(x) = 21$

Encuentra $f\left(\frac{1}{2}\right)$

20. $g(x) = 3^x(2)$

Encuentra $g(-4)$

Encuentra $g(x) = 162$

Encuentra $g\left(\frac{1}{2}\right)$

21. $I(t) = 210(1.08^t)$

Encuentra $I(12)$

Encuentra $I(t) = 420$

Encuentra $I\left(\frac{1}{2}\right)$

22. $h(x) = x^2 + x - 6$

Encuentra $h(-5)$

Encuentra $h(x) = 0$

Encuentra $h\left(\frac{1}{2}\right)$

23. $k(x) = -5x + 9$

Encuentra $k(-7)$

Encuentra $k(x) = 0$

Encuentra $k\left(\frac{1}{2}\right)$

24. $m(x) = (5^x)2$

Encuentra $m(-2)$

Encuentra $m(x) = 1$

Encuentra $m\left(\frac{1}{2}\right)$

3.3 Más Interesante

Actividad para Consolidar Comprensión

Ahora Carlos sabe que puede calcular la cantidad de interés ganado en una cuenta en incrementos más pequeños que un año completo. Le gustaría determinar cuánto dinero hay en una cuenta cada mes, si esta gana 5% anual con un depósito inicial de $ 300.

Comienza considerando el monto en la cuenta cada mes durante el primer año. Él sabe que para fin de año el saldo de la cuenta debería ser de $ 315, ya que aumenta un 5% durante el año.

1. Completa la tabla que muestra qué cantidad hay en la cuenta cada mes durante los primeros doce meses.

Tiempo	0												1 año
Saldo en la cuenta	$300												$315

2. ¿Por cuál número multiplicaste la cuenta cada mes para obtener el saldo del mes siguiente?

Carlos sabe que la ecuación exponencial que da el saldo anual de la cuenta es $A = 300(1.05)^t$ Con base en su trabajo para encontrar el saldo de la cuenta cada mes, Carlos escribe la siguiente ecuación para la misma cuenta: $A = 300(1.05^{1/12})^{12t}$.

3. Verifica que ambas ecuaciones den los mismos resultados. Usando las propiedades de los exponentes, explica por qué estas dos ecuaciones son equivalentes.

4. ¿Cuál es el significado de $12t$ en esta ecuación?

Carlos le muestra su ecuación a Clarita. Ella sugiere que su ecuación también podría ser aproximada $A = 300(1.004)^{12t}$, ya que $(1.05)^{1/12} \approx 1.004$. Carlos responde: "Sé que 1.05 en la ecuación $A = 300(1.05)^{t}$ significa que estoy ganando 5% de interés anual, pero, ¿qué significa el 1.004 en tu ecuación?

5. Contesta la pregunta de Carlos. ¿Qué significa 1.004 en $A = 300(1.004)^{12t}$?

Las propiedades de los exponentes se pueden usar para explicar por qué $[(1.05)^{1/12}]^{12t} = 1.05^{t}$. Aquí hay algunos ejemplos más de cómo usar las propiedades de exponentes con exponentes racionales. Para cada uno de los siguientes problemas, simplifica la expresión usando las propiedades de los exponentes, y explica qué significa la expresión en términos del contexto.

6. $(1.05)^{1/12} \cdot (1.05)^{1/12} \cdot (1.05)^{1/12}$

7. $[(1.05)^{1/12}]^{6}$

8. $(1.05)^{-1/12}$

9. $(1.05)^{2} \cdot (1.05)^{1/4}$

10. $\dfrac{(1.05)^{2}}{(1.05)^{1/2}}$

11. Usa $\left[(1.05)^{1/12}\right]^{12} = 1.05$ para explicar por qué $(1.05)^{1/12} = \sqrt[12]{1.05}$

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Significado de los exponentes

En la tabla a continuación hay una columna para la forma exponencial, el significado de esa forma, la cual es una lista de factores y la forma estándar del número. Completa la forma que falta.

Forma exponencial	Lista de factores	Forma estándar
5^3	$5 \cdot 5 \cdot 5$	125
1a.	$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$	b.
2. 2^{10}	a.	b.
3a.	b.	81
4. 11^5	a.	b.
5a.	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	b.
6a.	b.	625

Proporciona al menos otras tres formas equivalentes de la expresión exponencial. Usa reglas de exponentes como $3^5 \cdot 3^6 = 3^{11}$ y $\left(5^2\right)^3 = 5^6$ así como propiedades de la división y otras.

	1era Forma equivalente	2nda Forma equivalente	3ra Forma equivalente
7. $2^{10} =$			
8. $3^7 =$			
9. $13^{-8} =$			
10. $7^{\frac{1}{3}} =$			
11. $5^1 =$			

Need help? Visit **www.rsgsupport.org**

PRÁCTICA

Tema: Encontrar expresiones y funciones equivalentes

Determina si las tres expresiones en cada problema a continuación son equivalentes. Justifica por qué sí o por qué no son equivalentes.

12. $5(3^{x-1})$	$15(3^{x-2})$	$\frac{5}{3}(3^{x})$
13. $64\ (2^{-x})$	$\frac{64}{2^{x}}$	$64\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$
14. 3(x-1)+4	3x - 1	3(x-2) +7
15. $50(2^{x+2})$	$25(2^{2x+1})$	$50(4^{x})$
16. $30(1.05^{x})$	$30\left(1.05^{\frac{1}{7}}\right)^{7x}$	$30\left(1.05^{\frac{x}{2}}\right)^{2}$
17. $20\ (1.1^{x})$	$20\ (1.1^{-1})^{-1x}$	$20\left(1.1^{\frac{1}{5}}\right)^{5x}$

RENDIMIENTO

Tema: Uso de reglas de exponentes

Simplifica cada expresión. Tu respuesta debe estar en forma exponencial.

18. $7^{3}\cdot 7^{5}\cdot 7^{2}$

19. $(3^{4})^{5}$

20. $(5^{3})^{4}\cdot 5^{7}$

21. $x^{3}\cdot x^{5}$

22. x^{-b}

23. $x^{a}\cdot x^{b}$

24. $(x^{a})^{b}$

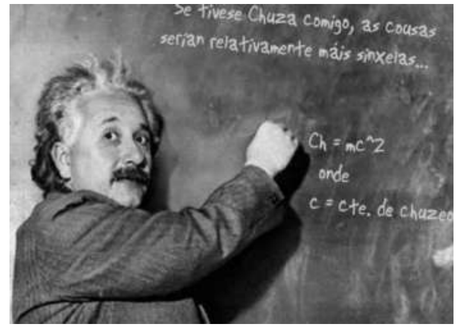
25. $\frac{y^{a}}{y^{b}}$

26. $\frac{(y^{a})^{c}}{y^{b}}$

27. $\frac{(3^{4})^{6}}{3^{7}}$

28. $\frac{r^{5}s^{3}}{rs^{2}}$

29. $\frac{x^{5}y^{12}z^{0}}{x^{8}y^{9}}$



3.4 Ideas Radicales

Actividad para Practicar Comprensión

Ahora que Tia y Tehani saben que $a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ se preguntan qué forma, forma radical o forma exponencial, es mejor usar cuando se trabaja con expresiones numéricas y algebraicas.

Tia dice que prefiere radicales, ya que comprende las siguientes propiedades para los radicales (y no hay demasiadas propiedades que recordar):

Si n es un número entero positivo mayor que 1 y tanto a como b son números reales positivos, entonces,

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Tehani dice que prefiere los exponentes ya que entiende las siguientes propiedades para los exponentes (y hay más propiedades con las que trabajar):

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
5. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$
6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

HAZ ESTO: Ilustra con ejemplos y explica, usando las propiedades de radicales y exponentes, por qué $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ y $a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ son verdaderas identidades.

Usando su notación preferida, Tia podría simplificar $\sqrt[3]{x^8}$ de la siguiente manera:

$$\sqrt[3]{x^8} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot x^2} = \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

(Tehani señala que Tia también usó algunas reglas de exponentes en su trabajo).

Por otro lado, Tehani podría simplificar $\sqrt[3]{x^8}$ de la siguiente manera:

$$\sqrt[3]{x^8} = x^{8/3} = x^{2+2/3} = x^2 \cdot x^{2/3} \text{ o } x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

Para cada uno de los siguientes problemas, simplifica la expresión de la forma en que crees que Tia y Tehani podrían hacerlo.

Expresión original	**Lo que Tia y Tehani podrían hacer para simplificar la expresión:**
$\sqrt{27}$	Método de Tia
	Método de Tehani
$\sqrt[3]{32}$	Método de Tia
	Método de Tehani

$\sqrt{20x^7}$	Método de Tia
	Método de Tehani
$\sqrt[3]{\frac{16xy^5}{x^7y^2}}$	Método de Tia
	Método de Tehani

Tia y Tehani continúan usando su notación preferida al resolver ecuaciones.

Por ejemplo, Tia podría resolver la ecuación $(x+4)^3 = 27$ de la siguiente manera:

$$(x+4)^3 = 27$$
$$\sqrt[3]{(x+4)^3} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3}$$
$$x+4 = 3$$
$$x = -1$$

Tehani podría resolver la ecuación de la siguiente manera:

$$(x+4)^3 = 27$$
$$\left[(x+4)^3\right]^{1/3} = 27^{1/3} = (3^3)^{1/3}$$
$$x+4 = 3$$
$$x = -1$$

Para cada uno de los siguientes problemas, simplifica la expresión de la forma en que crees que podrían hacerlo Tia y Tehani.

Ecuación original	**Lo que Tia y Tehani podrían hacer para simplificar la expresión:**
$(x-2)^2 = 50$	Método de Tia
	Método de Tehani
$9(x-3)^2 = 4$	Método de Tia
	Método de Tehani

Zac está mostrando su nueva calculadora gráfica a Tia y Tehani. Él está particularmente entusiasmado con la forma en que su calculadora lo ayudará a visualizar las soluciones a las ecuaciones.

"Mira", dice Zac. "Trato la ecuación como un sistema de dos ecuaciones. Establecí la expresión a la izquierda igual a y_1 y la expresión de la derecha igual a y_2, y sé que en el valor de x donde las gráficas cruzan las expresiones son iguales entre sí ".

Zac muestra su nuevo método en las dos ecuaciones que Tia y Tehani resolvieron usando las propiedades de radicales y exponentes. Para sorpresa de todos, ambas ecuaciones tienen una segunda solución.

1. Usa el método de gráficas de Zac para mostrar que ambas ecuaciones tienen dos soluciones. Determina los valores exactos de las soluciones que encuentres en la calculadora que Tia y Tehani no encontraron utilizando sus métodos algebraicos.

Tia y Tehani se sorprenden cuando se dan cuenta de que ambas ecuaciones tienen más de una respuesta.

2. Explica por qué hay una segunda solución para cada uno de estos problemas.

3. Modifica las estrategias algebraicas de Tia y Tehani para que encuentren ambas soluciones.

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO | Nombre | Periodo | Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Forma estándar de la forma cuadrática

En cada una de las ecuaciones cuadráticas, $ax^2 + bx + c = 0$ **identifica los valores de a, b y c.**

1. $x^2 + 3x + 2 = 0$

   a =
   b =
   c =

2. $2x^2 + 3x + 1 = 0$

   a =
   b =
   c =

3. $x^2 - 4x - 12 = 0$

   a =
   b =
   c =

Escribe cada una de las expresiones cuadráticas en forma factorizada.

4. $x^2 + 3x + 2$
5. $2x^2 + 3x + 1$
6. $x^2 - 4x - 12$
7. $x^2 - 3x + 2$
8. $x^2 - 5x - 6$
9. $x^2 - 4x + 4$
10. $x^2 + 8x - 20$
11. $x^2 + x - 12$
12. $x^2 - 7x + 12$

PRÁCTICA

Tema: Notación radical y exponentes radicales

Cada una de las siguientes expresiones se puede escribir usando notación radical, $\sqrt[n]{a^m}$ o exponentes racionales $a^{\frac{m}{n}}$. Reescribe cada una de las expresiones dadas en la forma que falta. Expresa en la forma más simplificada.

	Forma radical	Forma exponencial
13.	$\sqrt[3]{5^2}$	
14.		$16^{\frac{3}{4}}$
15.	$\sqrt[3]{5^7 \cdot 3^5}$	
16.		$9^{\frac{2}{3}} \cdot 9^{\frac{4}{3}}$
17.	$\sqrt[5]{x^{13}y^{21}}$	
18.	$\sqrt[3]{27a^5b^2}$	
19.	$\sqrt[5]{\dfrac{32x^{13}}{243y^{15}}}$	
20.		$9^{\frac{3}{2}}s^{\frac{6}{3}}t^{\frac{1}{2}}$

Resuelve las ecuaciones a continuación, usa radicales o exponentes racionales según sea necesario.

21. $(x+5)^4 = 81$

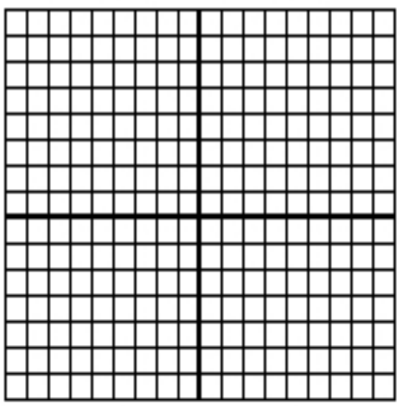
22. $2(x-7)^5 + 3 = 67$

RENDIMIENTO

Tema: Intersecciones de x e y para funciones lineales, exponenciales y cuadráticas

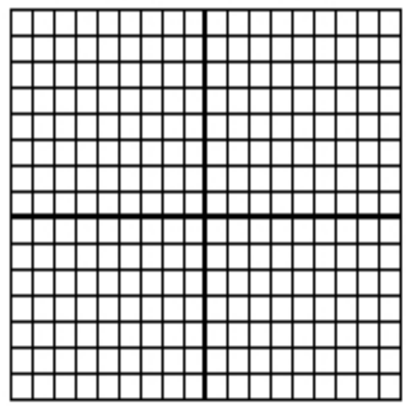
Dada la función, encuentra la intersección(es) de x e y si existen, y luego úsalas para graficar la función.

23. $f(x) = (x + 5)(x - 4)$



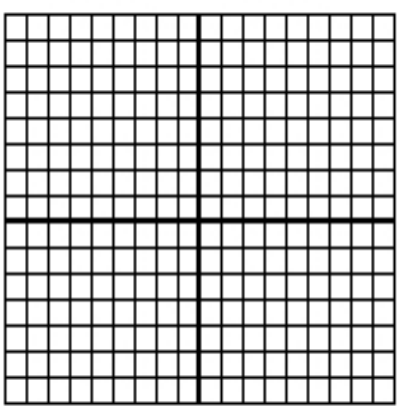
a. intersección(es) de x: b. intersección de y:

24. $g(x) = 5(2^{x-1})$



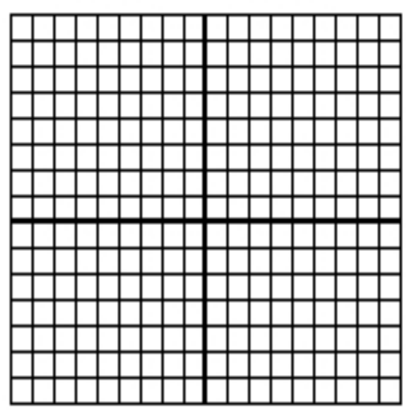
a. intersección(es) de x: b. intersección de y:

25. $h(x) = -2(x + 3)$



a. intersección(es) de x: b. intersección de y:

26. $k(x) = x^2 - 4$



a. intersección(es) de x: b. intersección de y:

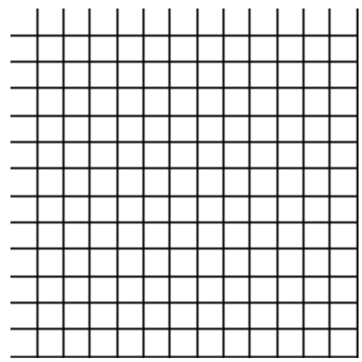
3.5 Una Intersección

Actividad para Desarrollar Comprensión

Las intersecciones de *x* de la gráfica de una función $f(x)$ son a menudo muy importantes porque son la solución a la ecuación $f(x)=0$. En tareas pasadas, aprendimos cómo encontrar las intersecciones de *x* de la función mediante factorización, lo que funciona muy bien para algunas funciones, pero no para otras. En esta tarea, vamos a trabajar en un proceso para encontrar las intersecciones de *x* de cualquier función cuadrática que las tenga. Comenzaremos pensando en lo que ya sabemos sobre algunas funciones cuadráticas específicas y luego usaremos lo que sabemos para generalizar este conocimiento en todas las funciones cuadráticas con intersecciones de *x*.

1. ¿Qué puedes decir sobre la gráfica de la función? $f(x)=x^2-2x-3$?

   a. Grafica la función

   b. ¿Cuál es la ecuación de la línea de simetría?

   c. ¿Cuál es el vértice de la función?

2. Ahora pensemos específicamente en las intersecciones de x.

   a. ¿Cuáles son las intersecciones de *x* de $f(x)=x^2-2x-3$?

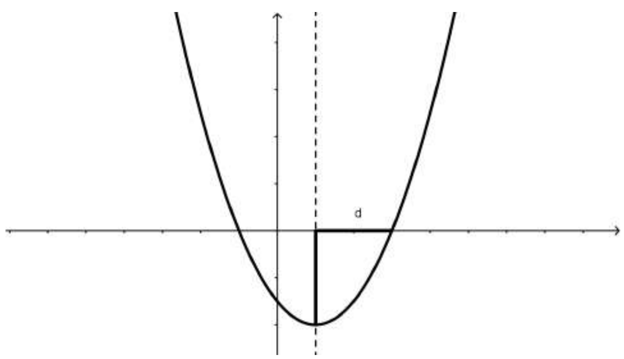
   b. ¿Qué tan lejos están las intersecciones de *x* de la línea de simetría?

   c. Si supieras que la línea de simetría es la recta *x = h*, y sabes qué tan lejos están las intersecciones de *x* de la línea de simetría, ¿cómo encontrarías las intersecciones de *x* reales?

   d. ¿Qué tan arriba del vértice están las intersecciones de *x*?

e. ¿Cuál es el valor de $f(x)$ en las intersecciones de x?

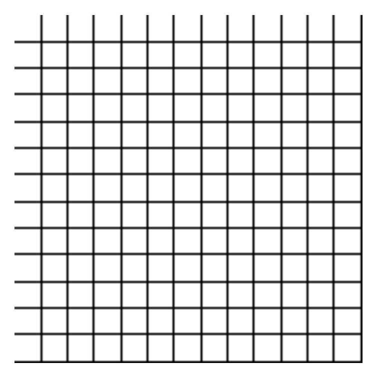
Solo para que sea un poco más fácil hablar sobre algunas de las características que se relacionan con las intersecciones, vamos a nombrarlas con variables. A partir de ahora, cuando hablemos de la distancia desde la línea de simetría a cualquiera de las intersecciones de x, la llamaremos *d*. El siguiente diagrama muestra esta característica.



Siempre nos referiremos a la línea de simetría como la línea $x = h$, por lo que las dos intersecciones de x estarán en los puntos $(h - d, 0)$ y $(h + d, 0)$.

3. Entonces, pensemos en otra función: $f(x) = x^2 - 6x + 4$

a. Grafica la función colocando la ecuación en forma de vértice.



b. ¿Cuál es el vértice de la función?

c. ¿Cuál es la ecuación de la línea de simetría?

d. ¿Cuál es tu cálculo de las intersecciones de x de la función?

e. ¿Cuál es tu cálculo de d?

f. ¿Cuál es el valor de $f(x)$ en las intersecciones de x?

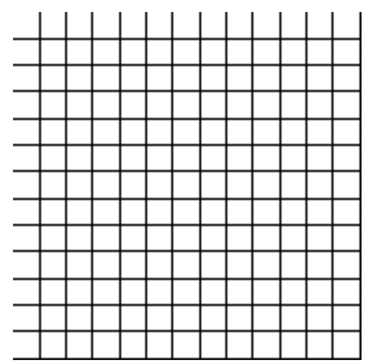
g. Usando la forma de vértice de la ecuación y tu respuesta a la parte "f" anterior, escribe una ecuación y resuélvela para encontrar los valores exactos de las intersecciones de *x*.

h. ¿Cuál es el valor exacto de *d*?

i. Usa una calculadora para encontrar aproximaciones para las intersecciones de *x*. ¿Cómo se comparan con tus cálculos?

4. ¿Qué tal una función con un alargamiento vertical? ¿Podemos encontrar los valores exactos para las intercepciones de *x* de la misma manera? Probémoslo con: $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$.

a. Grafica la función colocando la ecuación en forma de vértice.



b. ¿Cuál es el vértice de la función?

c. ¿Cuál es la ecuación de la línea de simetría?

d. ¿Cuál es tu cálculo de las intersecciones de *x* de la función?

e. ¿Cuál es tu cálculo de *d*?

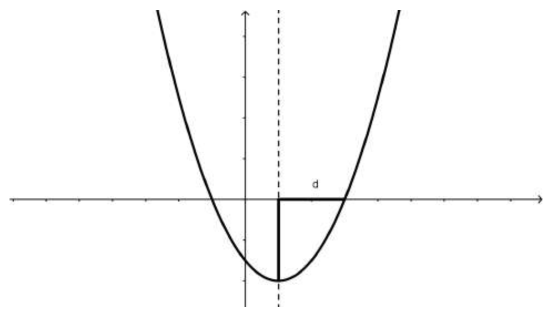
f. ¿Cuál es el valor de $f(x)$ en las intersecciones de *x*?

g. Usando la forma de vértice de la ecuación y tu respuesta a la parte "f" anterior, escribe una ecuación y resuélvela para encontrar los valores exactos de las intersecciones de x.

h. ¿Cuál es el valor exacto de d?

i. Compara tu solución con tu cálculo de las raíces. ¿Como te fue?

5. Finalmente, intentemos generalizar este proceso usando: $f(x) = ax^2 + bx + c$ para representar cualquier función cuadrática que tenga intersecciones de x. Aquí hay una gráfica posible de $f(x)$.



a. Comienza el proceso de la manera habitual poniendo la ecuación en forma de vértice. Es un poco complicado, pero haz lo mismo con a, b y c como lo que hiciste en el último problema con los números.

b. ¿Cuál es el vértice de la parábola?

c. ¿Cuál es la línea de simetría de la parábola?

d. Escribe y resuelve la ecuación para las intersecciones de *x* tal como lo hiciste anteriormente.

6. ¿Cómo podrías usar las soluciones que acabas de encontrar para decir cuáles son las intersecciones de *x* para la función? $f(x) = x^2 - 3x - 1$?

7. Aprender el álgebra para escribir la función cuadrática general $f(x) = ax^2 + bx + c$ en forma de vértice puede haber sido un poco difícil. Aquí hay otra manera en que podemos trabajar con la función cuadrática general que conduce a los mismos resultados a los que deberías haber llegado en 5d.

   a. Dado que las dos intersecciones de *x* son unidades *d* de la línea de simetría *x = h*, si la ecuación cuadrática cruza el eje de *x* sus intersecciones de *x* están en *(h - d, 0)* y *(h + d, 0)*. Siempre podemos escribir la forma factorizada de una ecuación cuadrática si conocemos sus intersecciones de *x*. La forma factorizada se verá como $f(x) = a(x - p)(x - q)$ donde *p* y *q* son dos intersecciones de *x*. Entonces, usando esta información, escribe la forma factorizada de la ecuación cuadrática general $f(x) = ax^2 + bx + c$ *usando el hecho de que sus intersecciones de x están en h-d y h + d.*

   b. Multiplica la forma factorizada (se multiplicarán dos expresiones trinomiales juntas) para obtener la ecuación cuadrática en forma estándar. Simplifica tu resultado tanto como sea posible combinando términos similares.

c. Ahora tienes la misma función cuadrática general escrita en forma estándar en dos formas diferentes, una donde los **coeficientes** de los términos son a, b y c, y una donde los coeficientes de los términos son expresiones que incluyen a, h y d. Haz coincidir los coeficientes; es decir, b, el coeficiente de x en una versión de la forma estándar es equivalente a ________ en la otra versión de la forma estándar. Asimismo, c, el término constante en una versión de la forma estándar es equivalente a _________ en la otra.

d. Resuelve las ecuaciones b = ________ y c = ________ para h y d. Trabaja con tus ecuaciones hasta que puedas expresar h y d con expresiones que solo involucren a, b y c.

e. En base a este trabajo, ¿cómo se pueden encontrar las intersecciones de x de cualquier ecuación cuadrática usando solo los valores para a, b y c?

f. ¿Cómo se compara tu respuesta a "e" con tu resultado en 5d?

8. Todas las funciones con las que hemos trabajado en esta tarea tienen gráficas con una abertura hacia arriba. ¿Funcionaría la fórmula para las parábolas con una abertura hacia abajo? Di por qué sí o por qué no utilizando un ejemplo que tú mismo crees, utilizando tus propios valores para los coeficientes a, b y c.

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO | Nombre | Periodo | Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Conversión de unidades de medida con área

Al trabajar con áreas, a veces es esencial convertir unidades de medida. Por ejemplo, puede ser necesario cambiar de yardas cuadradas a pies cuadrados. Convierte las áreas al calce a la unidad deseada. (Sugerencia: el área es bidimensional. $1\ yd^2 = 9\ ft^2$ porque 3 pies a lo largo de cada lado de un patio cuadrado equivalen a 9 pies cuadrados).

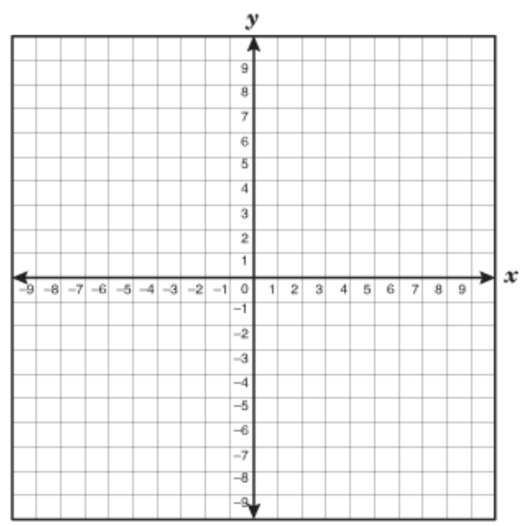
1. $7\ yd^2 = \ ?\ ft^2$
2. $5\ ft^2 = \ ?\ in^2$
3. $1\ mile^2 = \ ?\ ft^2$
4. $100\ m^2 = \ ?\ cm^2$
5. $300\ ft^2 = \ ?\ yd^2$
6. $96\ in^2 = \ ?\ ft^2$

PRÁCTICA

Tema: Transformaciones y parábolas, simetría y parábolas

7a. Grafica cada una de las funciones cuadráticas

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = x^2 - 9$$
$$h(x) = (x+2)^2 - 9$$



b. ¿Cómo se comparan las funciones entre sí?

c. ¿Cómo se comparan *g(x)* y *h(x)* con *f(x)?*

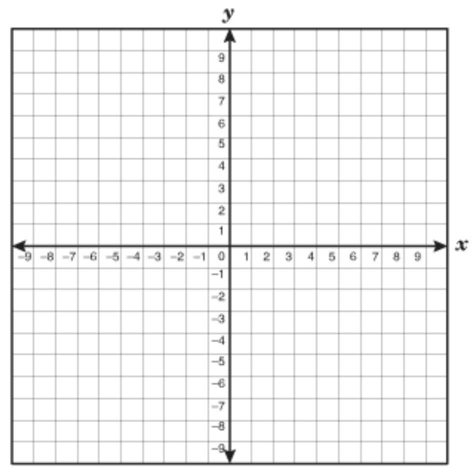
d. Repasa las funciones anteriores e identifica las intersecciones de *x* de *g(x).* ¿Cuáles son?

e. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos correspondientes a las intersecciones de *x* en *g(x)* en cada una de las otras funciones? ¿Cómo se comparan estas coordenadas entre sí?

Need help? Visit **www.rsgsupport.org**

8 a. Grafica cada una de las funciones cuadráticas

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = x^2 - 4$$
$$h(x) = (x - 1)^2 - 4$$



b. ¿Cómo se comparan las funciones entre sí?

c. ¿Cómo se comparan *g(x)* y *h(x)* con *f(x)?*

d. Repasa las funciones anteriores e identifica las intersecciones de *x* de *g(x).* ¿Cuáles son?

e. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos correspondientes a las intersecciones de *x* en *g(x)* en cada una de las otras funciones? ¿Cómo se comparan estas coordenadas entre sí?

9. ¿Cómo se pueden usar las transformaciones que ocurren en la función $f(x) = x^2$ para determinar dónde se encontrarán las intersecciones de *x* de la imagen de la función?

RENDIMIENTO

Tema: Notación de funciones y evaluación de funciones

Usa las funciones dadas para encontrar los valores que hacen falta.
(Verifica tu trabajo usando una gráfica).

10. $f(x) = x^2 + 4x - 12$

a. $f(0) =$ ______

b. $f(2) =$ _____

c. $f(x) = 0, \quad x =$ _____

d. $f(x) = 20, \quad x =$ _____

11. $g(x) = (x - 5)^2 + 2$

a. $g(0) =$ _____

b. $g(5) =$ ______

c. $g(x) = 0, \quad x =$ ______

d. $g(x) = 16, \quad x =$ ______

12. $f(x) = x^2 - 6x + 9$

a. $f(0) =$ ______

b. $f(-3) =$ ______

c. $f(x) = 0$, $x =$ ______

d. $f(x) = 16$, $x =$ ______

13. $g(x) = (x-2)^2 - 3$

a. $g(0) =$ ______

b. $g(5) =$ ______

c. $g(x) = 0$, $x =$ ______

d. $g(x) = -3$, $x =$ ______

14. $f(x) = (x+5)^2$

a. $f(0) =$ ______

b. $f(-2) =$ ______

c. $f(x) = 0$, $x =$ ______

d. $f(x) = 9$, $x =$ ______

15. $g(x) = -(x+1)^2 + 8$

a. $g(0) =$ ______

b. $g(2) =$ ______

c. $g(x) = 0$, $x =$ ______

d. $g(x) = 4$, $x =$ ______

3.6 Rivalidad en el Borde de la Banqueta

Actividad para Consolidar Comprensión

Carlos y Clarita tienen una brillante idea de cómo ganar dinero este verano. Dado que la comunidad en la que viven incluye muchas escuelas secundarias, un par de universidades e incluso algunos equipos deportivos profesionales, parece que todos tienen un equipo favorito al que les gusta animar. En el vecindario de Carlos y Clarita, estas rivalidades adquieren un significado especial, ya que muchos de los vecinos apoyan a diferentes equipos. Han observado que sus vecinos a menudo exhiben pósteres hechos a mano y otros artículos para que se conozca el apoyo a su equipo favorito. Los gemelos creen que pueden hacer que la gente del vecindario compre su nuevo servicio: pintar logotipos del equipo en los bordes de las aceras o en las entradas para autos.

Por una pequeña tarifa, Carlos y Clarita pintarán el logotipo de un equipo en el borde de la acera de un vecino, junto al número de su casa. Por una tarifa más alta, los gemelos pintarán la mascota en la entrada para autos. Carlos y Clarita han diseñado plantillas para facilitar la pintura y han calculado el costo de los suministros. También han encuestado a vecinos para tener una idea de cuánta gente en la comunidad podría estar interesada en comprar su servicio. Esto es lo que han decidido, en base a su investigación.

- *Un logotipo en la acera requerirá 48 in^2 de pintura*
- *Una mascota en la entrada para autos requerirá 16 ft^2 de pintura*
- *Las encuestas muestran que los gemelos pueden vender 100 mascotas para la entrada de autos a un costo de $ 20, y venderán 10 mascotas menos por cada $ 5 adicionales que cobren*

1. Si el logotipo de una acera está diseñado en forma de cuadrado, ¿cuáles serán sus dimensiones?

Un logotipo cuadrado no cabrá bien en el borde de una acera, por lo que Carlos y Clarita están experimentando con diferentes tipos de rectángulos. Están usando una aplicación de *software* que les permite estirar o encoger sus diseños de logotipos para adaptarse a diferentes dimensiones rectangulares.

2. A Carlos le gusta el aspecto del logotipo cuando el rectángulo en el que cabe es 8 pulgadas más largo que ancho. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones del logotipo de la acera para encajar en este tipo de rectángulo? Como parte de tu trabajo, escribe una ecuación cuadrática que represente estos requisitos.

3. Clarita prefiere la apariencia del logotipo cuando el rectángulo en el que cabe es 13 pulgadas más largo que ancho. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones del logotipo de la acera para que quepa este tipo de rectángulo? Como parte de tu trabajo, escribe una ecuación cuadrática que represente estos requisitos.

Tus ecuaciones cuadráticas en los dos problemas anteriores probablemente comenzaron luciendo así: $x(x+n)=48$ donde n representa el número de pulgadas que el rectángulo es más largo que ancho. La expresión a la izquierda de la ecuación se puede multiplicar para obtener la ecuación de la forma $x^2+nx=48$. Si restamos 48 de ambos lados de esta ecuación obtenemos $x^2+nx-48=0$. De esta forma, la expresión de la izquierda se parece más a las funciones cuadráticas con las que has estado trabajando en tareas anteriores, $y=x^2+nx-48$.

4. Considera la ecuación cuadrática de Carlos donde *n* = 8, así que $x^2+8x-48=0$. ¿Cómo podemos usar nuestro trabajo con funciones cuadráticas como $y=x^2+8x-48$ para ayudarnos a resolver la ecuación cuadrática $x^2+8x-48=0$? Describe al menos dos estrategias diferentes que puedes usar y luego ejecútalas. Tus estrategias deberían darte soluciones a la ecuación, así como una solución a la pregunta que Carlos intenta responder en el problema número 2.

5. Ahora considera la ecuación cuadrática de Clarita donde *n* = 13, así que $x^2+13x-48=0$. Describe al menos dos estrategias diferentes que podrías usar para resolver esta ecuación, y luego ejecútalas. Tus estrategias deberían darte soluciones a la ecuación, así como una solución a la pregunta que Clarita está tratando de responder en el problema número 3.

6. Después de mucho desacuerdo, Carlos y Clarita acuerdan diseñar el logotipo de la acera para que quepa en un rectángulo que es 6 pulgadas más largo que ancho. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones del logotipo de la acera para que quepa en este tipo de rectángulo? Como parte de tu trabajo, escribe y resuelve una ecuación cuadrática que represente estos requisitos.

7. ¿Cuáles son las dimensiones de una mascota para la entrada de autos, si está diseñada para caber en un rectángulo que mide 6 pies más que su ancho? (Consulta los requisitos para una mascota de entrada de autos que figure en la lista anterior.) Como parte de tu trabajo, escribe y resuelve una ecuación cuadrática que represente estos requisitos.

8. ¿Cuáles son las dimensiones de una mascota para la entrada de autos, si está diseñada para caber en un rectángulo que mide 10 pies más que su ancho? (Consulta los requisitos para una mascota de entrada de autos que figure en la lista anterior.) Como parte de tu trabajo, escribe y resuelve una ecuación cuadrática que represente estos requisitos.

Carlos y Clarita también están examinando los resultados de su encuesta del vecindario, tratando de determinar cuánto deberían cobrar por una mascota en la entrada de autos. Recuerda, esto es lo que han encontrado en la encuesta: pueden vender 100 mascotas para entrada de autos a un costo de $ 20, y venderán 10 mascotas menos por cada $ 5 adicionales que cobren.

9. Haz una tabla, dibuja una gráfica y escribe una ecuación para la cantidad de mascotas que los gemelos pueden vender por cada incremento de $ 5, x, en el precio de la mascota.

Cantidad de incrementos de $ 5 en el precio	Número de mascotas compradas
0	100
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

10. Haz una tabla, dibuja una gráfica (en el mismo conjunto de ejes) y escribe una ecuación para el precio de una mascota para entrada de autos por cada $ 5 de incremento, x, en el precio.

Cantidad de incrementos de $5 en el precio	Precio de una mascota
0	20
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

11. Haz una tabla, dibuja una gráfica y escribe una ecuación para los ingresos que los gemelos recolectarán por cada incremento de $ 5 en el precio de la mascota.

Cantidad de incrementos de $5 en el precio	Ingresos = precio x cantidad de mascotas vendidas
0	2000
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

12. Los gemelos estiman que el costo de los suministros será de $ 250 y les gustaría obtener $ 2000 en ganancias por la venta de mascotas para la entrada de autos. Por lo tanto, deberán recaudar $ 2250 en ingresos. Escribe y resuelve una ecuación cuadrática que represente una recaudación de ingresos de $ 2250. Asegúrate de mostrar claramente tu estrategia para resolver esta ecuación cuadrática.

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO | Nombre | Periodo | Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Encontrar las intersecciones de *x* para ecuaciones lineales

1. Encuentra la intersección de *x* de cada ecuación a continuación. Escribe tu respuesta como un par ordenado. Analiza cómo el formato de la ecuación dada facilita o dificulta tu trabajo.

a. $3x + 4y = 12$	b. $y = 5x - 3$	c. $y - 5 = -4(x + 1)$
d. $y = -4x + 1$	e. $y - 6 = 2(x + 7)$	f. $5x - 2y = 10$

2. ¿Cuál de los formatos de ecuaciones lineales anteriores facilita tu trabajo para encontrar la intersección de *x*? ¿Por qué?

3. Usando las mismas ecuaciones de la pregunta 1, encuentra las intersecciones de *y*. Escribe tus respuestas como pares ordenados.

a. $3x + 4y = 12$

b. $y = 5x - 3$

c. $y - 5 = -4(x + 1)$

d. $y = -4x + 1$

e. $y - 6 = 2(x + 7)$

f. $5x - 2y = 10$

4. ¿Cuál de los formatos anteriores facilita la búsqueda de la intersección de *y*? ¿Por qué?

PRÁCTICA

Tema: Resuelve ecuaciones cuadráticas, conectando ecuaciones cuadráticas con el área

Para cada una de las ecuaciones cuadráticas dadas, (a) describe el rectángulo con el que se ajusta la ecuación. (b) ¿Qué restricciones se han colocado en las dimensiones del rectángulo?

5. $x^2 + 7x - 170 = 0$

6. $x^2 + 15x - 16 = 0$

7. $x^2 + 2x - 35 = 0$

8. $x^2 + 10x - 80 = 0$

Resuelve las ecuaciones cuadráticas a continuación.

9. $x^2 + 7x - 170 = 0$

10. $x^2 + 15x - 16 = 0$

11. $x^2 + 2x - 35 = 0$

12. $x^2 + 10x - 80 = 0$

RENDIMIENTO

Tema: Factorización de expresiones

Escribe cada una de las siguientes expresiones en forma factorizada.

13. $x^2 - x - 132$

14. $x^2 - 5x - 36$

15. $x^2 + 5x + 6$

16. $x^2 + 13x + 42$

17. $x^2 + x - 56$

18. $x^2 - x$

19. $x^2 - 8x + 12$

20. $x^2 - 10x + 25$

21. $x^2 + 5x$

CC BY William Warby
https://flic.kr/p/8ur4Pb

3.7 Perfeccionando mis *Quads*

Actividad para Practicar Comprensión

Carlos y Clarita, Tia y Tehani, y su mejor amigo Zac están discutiendo sus métodos favoritos para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Cada estudiante piensa en la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ como parte de su estrategia.

Carlos: "Me gusta hacer una tabla de valores para *x* y encontrar las soluciones inspeccionando la tabla".

Zac: "Me gusta graficar la función cuadrática relacionada y usar mi gráfica para encontrar las soluciones".

Clarita: "Me gusta escribir la ecuación en forma factorizada y luego usar los factores para encontrar las soluciones".

Tia: "Me gusta tratarla como una función cuadrática que pongo en forma de vértice completando el cuadrado. Entonces, puedo usar una raíz cuadrada para deshacer la expresión al cuadrado ".

Tehani: "También me gusta usar la fórmula cuadrática para encontrar las soluciones".

Demuestra cómo cada estudiante puede resolver cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

Resuelve: $x^2 - 2x - 15 = 0$	Estrategia de Carlos	Estrategia de Zac
Estrategia de Clarita	Estrategia de Tia	Estrategia de Tehani

Resuelve: $2x^2+3x+1=0$	Estrategia de Carlos	Estrategia de Zac
Estrategia de Clarita	Estrategia de Tia	Estrategia de Tehani

Resuelve: $x^2+4x-8=0$	Estrategia de Carlos	Estrategia de Zac
Estrategia de Clarita	Estrategia de Tia	Estrategia de Tehani

Describe por qué funciona cada estrategia.

A medida que los estudiantes continúan probando sus estrategias, se dan cuenta que a veces una estrategia funciona mejor que otra. Explica cómo decidirías cuándo usar cada estrategia.

Aquí hay un desafío adicional. ¿Cómo podría cada estudiante resolver el siguiente sistema de ecuaciones?

Resuelve este sistema: $y_1 = x^2 - 4x + 1$ $y_2 = x - 3$	<u>Estrategia de Carlos</u>	<u>Estrategia de Zac</u>
<u>Estrategia de Clarita</u>	<u>Estrategia de Tia</u>	<u>Estrategia de Tehani</u>

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Simetría y distancia

Las funciones dadas proporcionan la conexión entre las áreas posibles, *A (x)*, que pueden crearse mediante un rectángulo para una longitud de lado dada, *x*, y una cantidad de perímetro establecida. Podrías pensar en las diferentes cantidades de área que puedes cerrar con una cantidad determinada de cerca siempre y cuando crees una cerca rectangular.

1. $A(x) = x\,(10 - x)$

Encuentra lo siguiente:

a. $A(3) =$ b. $A(4) =$

c. $A(6) =$ d. $A(x) = 0$

e. ¿Cuándo está *A (x)* a su máximo? Explica o muestra cómo lo sabes.

2. $A(x) = x\,(50 - x)$

Encuentra lo siguiente:

a. $A(10) =$ b. $A(20) =$

c. $A(30) =$ d. $A(x) = 0$

e. ¿Cuándo está *A (x)* a su máximo? Explica o muestra cómo lo sabes.

3. $A(x) = x(75 - x)$

Encuentra lo siguiente:

a. $A(20) =$ *b.* $A(35) =$

c. $A(40) =$ *d.* $A(x) = 0$

e. ¿Cuándo está *A (x)* a su máximo? Explica o muestra cómo lo sabes.

4. $A(x) = x(48 - x)$

Encuentra lo siguiente:

a. $A(10) =$ b. $A(20) =$

c. $A(28) =$ d. $A(x) = 0$

e. ¿Cuándo está *A (x)* a su máximo? Explica o muestra cómo lo sabes.

PRÁCTICA

Tema: Resolver eficazmente ecuaciones cuadráticas

Para cada una de las ecuaciones cuadráticas dadas, encuentra las soluciones usando un método eficaz. Indica el método que estás utilizando y las soluciones. Debes usar al menos tres métodos diferentes.

5. $x^2 + 17x + 60 = 0$

6. $x^2 + 16x + 39 = 0$

7. $x^2 + 7x - 5 = 0$

8. $3x^2 + 14x - 5 = 0$

9. $x^2 - 12x = -8$

10. $x^2 + 6x = 7$

Resume el proceso para resolver una ecuación cuadrática con la estrategia indicada. Da ejemplos junto con explicaciones escritas, también indica cuándo es mejor usar esta estrategia.

11. Completando el cuadrado

12. Factorizando

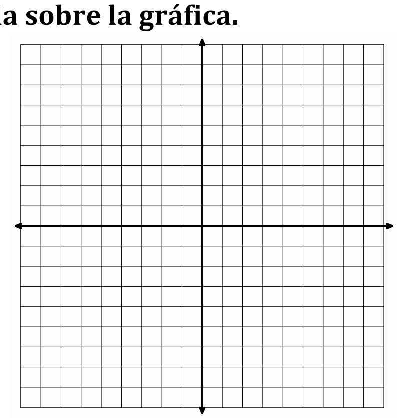
13. Fórmula cuadrática

RENDIMIENTO

Tema: Graficar ecuaciones cuadráticas y encontrar las características esenciales de la gráfica. Resolver sistemas de ecuaciones.

Grafica la función cuadrática y proporciona la información deseada sobre la gráfica.

14. $f(x) = x^2 + 8x + 13$



a. Línea de simetría:

b. Intersecciones de x:

c. Intersección de y:

d. Vértice:

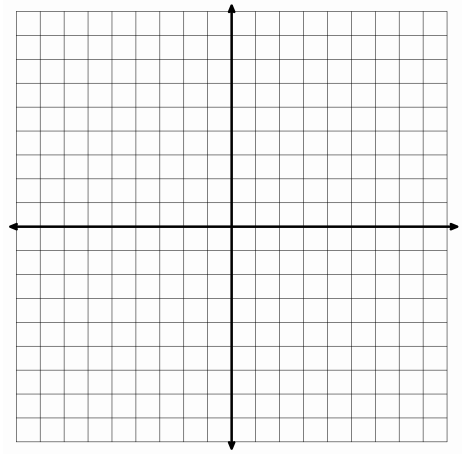
15. $f(x) = x^2 - 4x - 1$

a. Línea de simetría:

b. Intersecciones de x:

c. Intersección de y:

d. Vértice:



Resuelve cada sistema de ecuaciones usando un método algebraico y revisa tu trabajo.

16.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

17.

$$\begin{cases} y = -7x + 12 \\ y = 5x - 36 \end{cases}$$

18.

$$\begin{cases} y = 2x + 12 \\ y = 10x - x^2 \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} y = 24x - x^2 \\ y = 8x + 48 \end{cases}$$

3.8 Por Determinarse . . .

Actividad para Desarrollar Comprensión

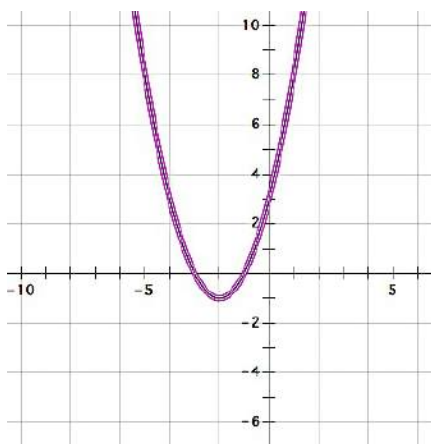
CC BY Ben Salter
https://flic.kr/p/5xVGjJ

Israel y Miriam están trabajando juntos en una tarea. Necesitan escribir las ecuaciones de las funciones cuadráticas a partir de la información que se proporciona en una tabla o una gráfica. Al principio, esta tarea parecía realmente fácil. Sin embargo, a medida que continuaron trabajando en la tarea, el álgebra se volvió más desafiante y planteó algunas preguntas interesantes que desean preguntarle a su maestro.

Repasa los siguientes problemas de la tarea de Israel y Miriam. Usa la información en la tabla o la gráfica para escribir la ecuación de la función cuadrática en las tres formas. Puedes comenzar con cualquier forma de tu elección, pero necesitas encontrar las tres formas equivalentes. (Si te quedas atascado, tu maestro tiene algunos consejos de Israel y Miriam que podrían ayudarte).

1.

x	y
-5	8
-4	3
-3	0
-2	-1
-1	0
0	3
1	8
2	15
3	24
4	35



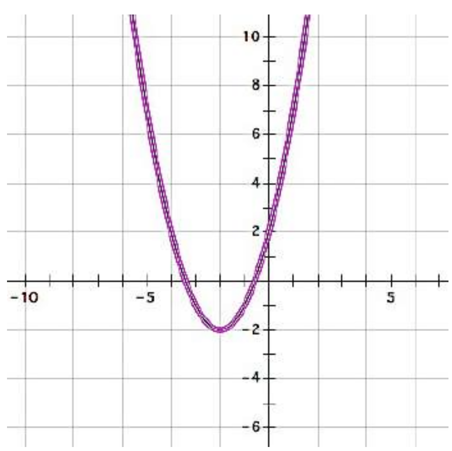
Forma estándar:

Forma factorizada:

Forma de vértice:

2.

x	y
-5	7
-4	2
-3	-1
-2	-2
-1	-1
0	2
1	7
2	14
3	23
4	34



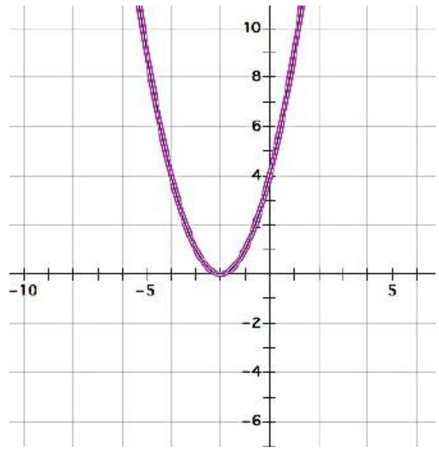
Forma estándar:

Forma factorizada:

Forma de vértice:

3.

x	y
-5	9
-4	4
-3	1
-2	0
-1	1
0	4
1	9
2	16
3	25
4	36



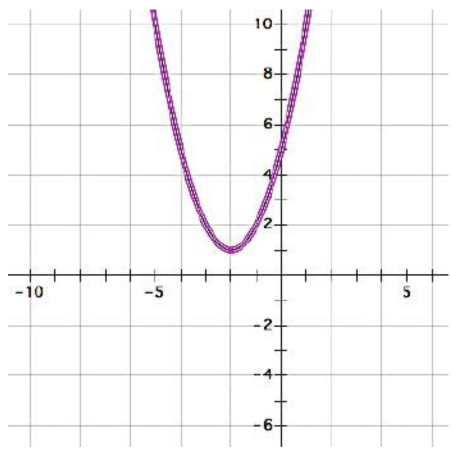
Forma estándar:

Forma factorizada:

Forma de vértice:

4.

x	y
-5	10
-4	5
-3	2
-2	1
-1	2
0	5
1	10
2	17
3	26
4	37



Forma estándar:

Forma factorizada:

Forma de vértice:

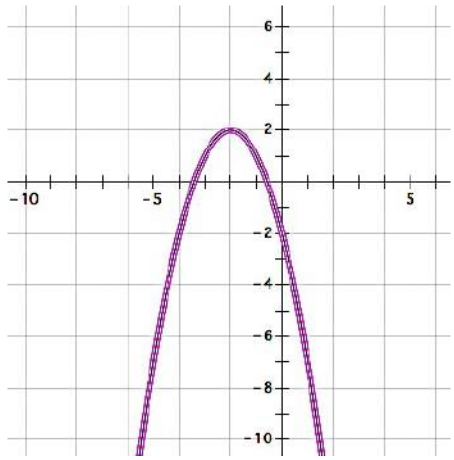
5. A Israel le preocupaba que su forma factorizada para la función en la pregunta 4 no parece del todo correcta. Miriam sugirió que lo comprobara insertando algunos valores para *x* para ver si obtiene los mismos puntos que los de la tabla. Comprueba *tu* forma factorizada. ¿Obtienes los mismos valores que los de la tabla?

6. ¿Por qué crees que Israel está preocupado por la forma factorizada de la función de la pregunta 4?

Aquí hay algunos problemas más de la tarea de Israel y Miriam.

7.

x	y
-5	-7
-4	-2
-3	1
-2	2
-1	1
0	-2
1	-7
2	-14
3	-23
4	-34



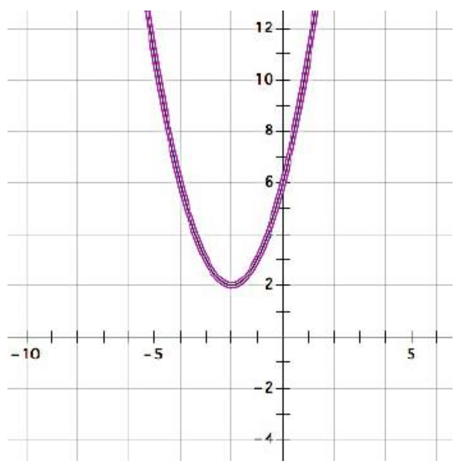
Forma estándar:

Forma factorizada:

Forma de vértice:

8.

x	y
-5	11
-4	6
-3	3
-2	2
-1	3
0	6
1	11
2	18
3	27
4	38



Forma estándar:

Forma factorizada:

Forma de vértice:

9. Miriam nota que las gráficas de la función 7 y la función 8 tienen el mismo punto de vértice. Israel se da cuenta de que las gráficas de la función 2 y la función 7 son imágenes idénticas en el eje *x*. ¿Qué notas sobre las raíces de estas tres funciones cuadráticas?

El teorema fundamental del álgebra

Un polinomio es una función de la forma:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots a_{n-3}x^3 + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

donde todos los exponentes son números enteros positivos y todos los coeficientes $a_0 \ldots a_n$ son constantes.

A medida que evolucionó la teoría de encontrar raíces de polinomios, un matemático del siglo XVII, Girard (1595-1632), hizo la siguiente afirmación que se ha llegado a conocer como el Teorema Fundamental del Álgebra: *Un polinomio de grado n tiene n raíces.*

10. En las clases de matemáticas posteriores, estudiarás polinomios que contienen términos ordenados más altos, como x^3 o x^5. Según tu trabajo en esta tarea, ¿crees que este teorema mantiene su veracidad para las funciones cuadráticas? Es decir, hacer todas las funciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$ siempre tiene dos raíces? [Examina las gráficas de cada una de las funciones cuadráticas para las que has escrito ecuaciones en esta tarea. ¿Todas ellas tienen dos raíces? ¿Por qué sí o por qué no?]

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO | Nombre | Periodo | Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Simplificar raíces

Simplifica cada una de las raíces a continuación.

1. $\sqrt{8}$
2. $\sqrt{18}$
3. $\sqrt{32}$
4. $\sqrt{20}$
5. $\sqrt{45}$
6. $\sqrt{80}$

7. ¿Cuál es la conexión entre las raíces de arriba? Explica.

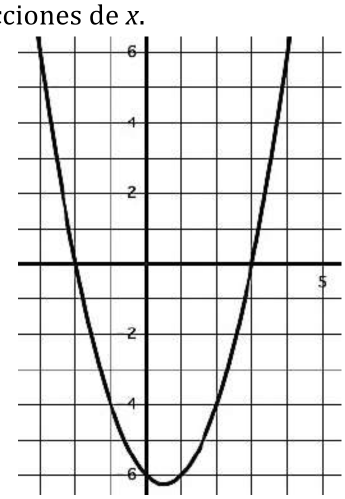
PRÁCTICA

Tema: Determina la naturaleza de las intersecciones de *x* para cada ecuación cuadrática al calce.

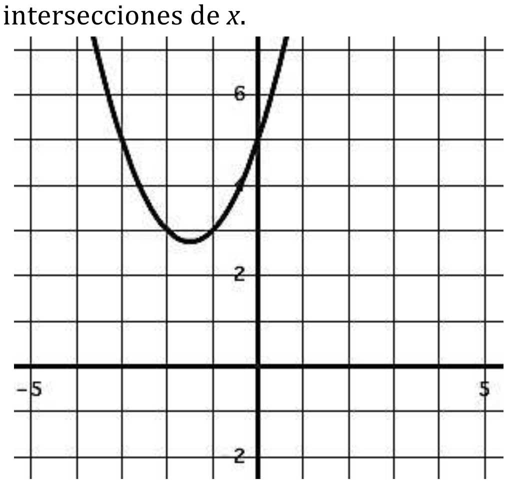
Dada la función cuadrática, su gráfica u otra información, determina la naturaleza de las intersecciones de *x* (qué tipo de número es). Explica o muestra cómo lo sabes.

(Números enteros "W", Números enteros positivos y negativos "Z", "Q" Racionales, "$\overline{\mathbb{Q}}$", Irracionales, o "No reales")

8. Determina la naturaleza de las intersecciones de *x*.



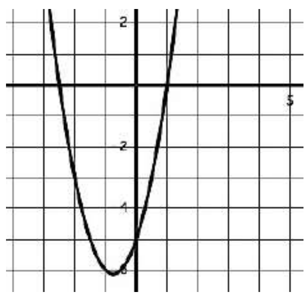
9. Determina la naturaleza de las intersecciones de *x*.



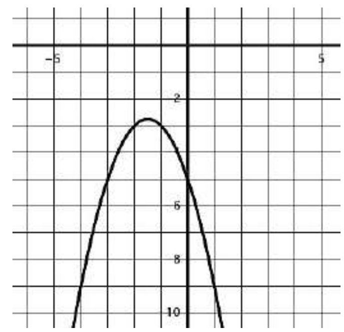
10. Determina la naturaleza de las intersecciones de *x*. $f(x) = x^2 + 4x - 24$

11. Determina la naturaleza de las intersecciones de *x*. $g(x) = (2x - 1)(5x + 2)$

12. Determina la naturaleza de las intersecciones de *x*. $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$



13. Determina la naturaleza de las intersecciones de *x*.



14. Determina la naturaleza de las intersecciones de *x*. $r(t) = t^2 - 8t + 16$

15. Determina la naturaleza de las intersecciones de *x*. $h(x) = 3x^2 - 5x + 9$

Determina la cantidad de raíces que tendrá cada polinomio.

16. $x^5 + 7x^3 - x^2 + 4x - 21$

17. $4x^3 + 2x^2 - 3x - 9$

18. $2x^7 + 4x^5 - 5x^2 + 16x + 3$

RENDIMIENTO

Tema: Hallar las intersecciones de *x* para las funciones cuadráticas usando factorización y fórmula cuadrática.

Si la función cuadrática dada se puede factorizar, factoriza y proporciona las intersecciones de *x*. Si no puedes factorizar, usa la fórmula cuadrática para encontrar las intersecciones de *x*.

19. $A(x) = x^2 + 4x - 21$

20. $B(x) = 5x^2 + 16x + 3$

21. $C(x) = x^2 - 4x + 1$

22. $D(x) = x^2 - 16x + 4$

23. $E(x) = x^2 + 3x - 40$

24. $F(x) = 2x^2 - 3x - 9$

25. $G(x) = x^2 - 3x$

26. $H(x) = x^2 + 6x + 8$

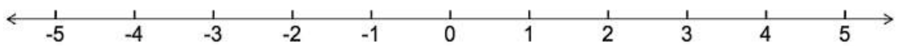
27. $K(x) = 3x^2 - 11$

3.9 Mis Amigos Irracionales e Imaginarios

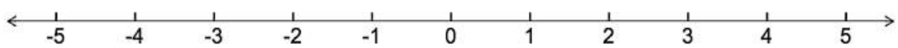
Actividad para Consolidar Comprensión

Parte 1: Números Irracionales

1. Verifica que $4\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=0$ y $4x^2-4x-15=0$ sean ecuaciones equivalentes (muestra tu trabajo), y traza las soluciones a las ecuaciones cuadráticas en la siguiente recta numérica:

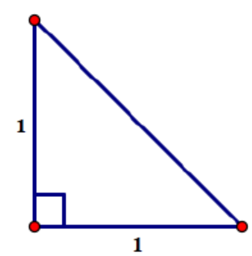


2. Verifica que $(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})=0$ y $4x^2-4x+2=0$ sean ecuaciones equivalentes (muestra tu trabajo), y traza las soluciones a las ecuaciones cuadráticas en la siguiente recta numérica:



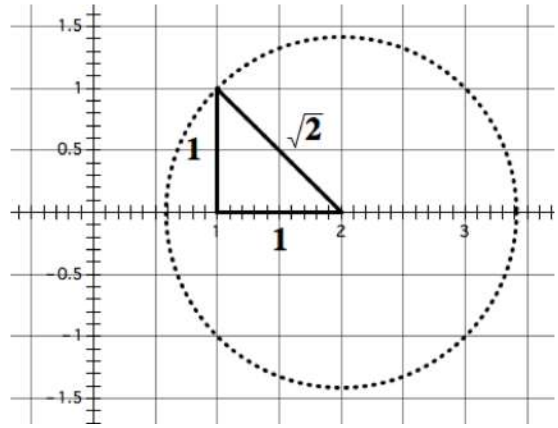
Es posible que te haya resultado difícil ubicar los puntos exactos en la recta numérica que representan las dos soluciones al segundo par de ecuaciones cuadráticas indicadas anteriormente. Los siguientes diagramas pueden ayudar.

3. Encuentra el perímetro de este triángulo isósceles. Expresa tu respuesta de la manera más sencilla.



Podríamos dar un cálculo del perímetro de este triángulo con un número decimal, pero el perímetro exacto es $2+\sqrt{2}$, que no puede simplificarse más. Ten en cuenta que esta notación representa un solo número, —la distancia alrededor del perímetro del triángulo—, aunque esté escrito como la suma de dos términos.

4. Explica cómo podrías usar este diagrama para localizar las dos soluciones a las ecuaciones cuadráticas dadas en el segundo problema anterior: $2+\sqrt{2}$ y $2-\sqrt{2}$.



5. ¿Son los números que hemos localizado en la recta numérica números racionales o números irracionales? Explica tu respuesta.

Ambos conjuntos de ecuaciones cuadráticas dadas en los problemas 1 y 2 anteriores tienen soluciones que se pueden trazar en una recta numérica. Las soluciones al primer conjunto de ecuaciones cuadráticas son números racionales. Las soluciones al segundo conjunto de ecuaciones cuadráticas son números irracionales.

Idea importante #1: El conjunto de números que contiene todos *los números racionales* y todos *los números irracionales* se llama *conjunto de números reales*. La ubicación de todos los puntos en una recta numérica puede representarse con números reales.

Parte 2: Números imaginarios y complejos

En la tarea anterior, *Por Determinarse. . .* descubriste que la fórmula cuadrática da las soluciones a la ecuación cuadrática $x^2+4x+5=0$ ya que $-2+\sqrt{-1}$ y $-2-\sqrt{-1}$. Debido a que la raíz cuadrada de un número negativo no tiene un valor definido como número racional o irracional, *Euler* propuso que se incluya un nuevo número $i=\sqrt{-1}$ conocido como el sistema numérico complejo.

6. De acuerdo con la definición de Euler de *i*, ¿cuál sería el valor de i^2?

Con la introducción del número *i*, se puede representar la raíz cuadrada *de cualquier número negativo.* Por ejemplo: $\sqrt{-2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{2}\cdot i$ y $\sqrt{-9}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=3i$.

7. Encuentra los valores de las siguientes expresiones. Muestra los detalles de tu trabajo.

(a) $\left(\sqrt{2}\cdot i\right)^2$

(b) $3i \times 3i$

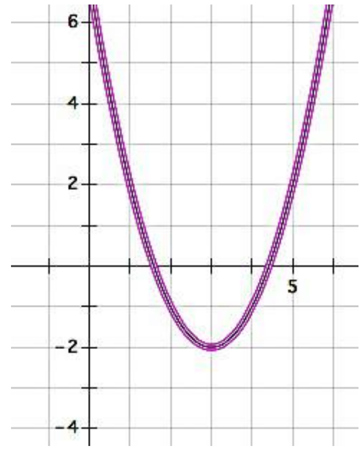
Usando esta nueva notación, las soluciones a la ecuación $x^2 + 4x + 5 = 0$ se pueden escribir como $-2+i$ y $-2-i$, y la forma factorizada de $x^2 + 4x + 5$ se puede escribir como $(x+2-i)(x+2+i)$

8. Verifica que $x^2 + 4x + 5$ y $(x+2-i)(x+2+i)$ sean equivalentes al expandir y simplificar la forma factorizada. Muestra los detalles de tu trabajo.

Idea importante #2: Los números como $3i$ y $\sqrt{2}\cdot i$ se llaman *números imaginarios puros*. Los números como $-2-i$ y $-2+i$ que incluyen un término real y un término imaginario son llamados *números complejos.*

La fórmula cuadrática generalmente se escribe en la forma $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Una forma equivalente es $\dfrac{-b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Si a, b y c son coeficientes racionales, entonces $\dfrac{-b}{2a}$ es un término racional, y $\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ puede ser un término racional, un término irracional o un término imaginario, dependiendo del valor de la expresión bajo el signo de la raíz cuadrada.

9. Examina las raíces de la función cuadrática $y = x^2 - 6x + 7$ mostrada en la gráfica a la derecha. ¿Cómo se muestran los términos $\frac{-b}{2a}$ y $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ en esta gráfica?

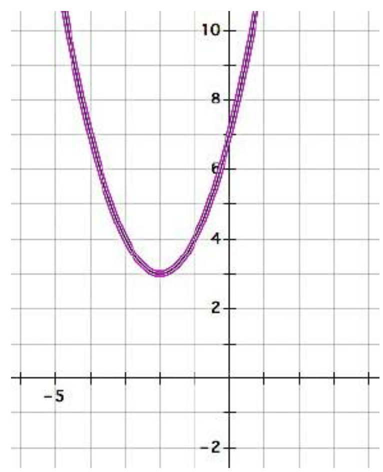


Recuerda el trabajo que hiciste en la tarea *Por Determinarse. . .*

10. ¿Qué funciones cuadráticas en esa tarea tenían raíces complejas? (Enlístalas aquí).

11. ¿Cómo puedes determinar a partir de la gráfica si una función cuadrática tiene raíces complejas?

12. Encuentra las raíces complejas de la siguiente función cuadrática representada por su gráfica.



13. Refleja la gráfica de la función cuadrática dada en la pregunta 12 sobre la línea horizontal y = 3. Encuentra las raíces irracionales de la función cuadrática reflejada.

14. ¿Cómo es similar el trabajo que hiciste para encontrar las raíces de las funciones cuadráticas en las preguntas 12 y 13?

Idea importante #3: Los números complejos no son números reales — no descansan en la recta numérica real que incluye todos los números racionales e irracionales; También ten en cuenta que los números reales son un subconjunto de los números complejos ya que un número real resulta cuando la parte imaginaria de *a* + *bi* es 0, es decir, *a* + 0*i*.

<u>Volviendo a analizar el Teorema fundamental del álgebra</u>

Recuerda la siguiente información dada en la tarea anterior:

Un polinomio es una función de la forma:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots a_{n-3}x^3 + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

donde todos los exponentes son números enteros positivos y todos los coeficientes $a_0 \ldots a_n$ son constantes.

A medida que evolucionó la teoría de encontrar raíces de polinomios, un matemático del siglo XVII, Girard (1595-1632), hizo la siguiente afirmación que se ha llegado a conocer como <u>el Teorema Fundamental del Álgebra</u>: *Un polinomio de grado n tiene n raíces.*

15. Según tu trabajo en esta tarea, ¿crees que este teorema se mantiene verdadero para las funciones cuadráticas? Es decir, ¿hacer todas las funciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$ siempre tiene dos raíces?

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Clasificación de números según el conjunto

Clasifica cada uno de los números representados a continuación según los conjuntos a los que pertenecen. Si un número pertenece en más de un conjunto, enlista todos los que correspondan.
(Números enteros "W", Números enteros positivos y negativos "Z", Racionales "Q", Irracionales "$\overline{\mathbb{Q}}$", Reales "R", Complejos "C").

1. π
2. -13
3. $\sqrt{-16}$
4. 0
5. $\sqrt{75}$
6. $\frac{9}{3}$
7. $\sqrt{\frac{4}{9}}$
8. $5 + \sqrt{2}$
9. $\sqrt{-40}$

PRÁCTICA

Tema: Simplificar raíces, números imaginarios

Simplifica cada expresión a continuación.

10. $3 + \sqrt{2} - 7 + 3\sqrt{2}$
11. $\sqrt{5} - 9 + 8\sqrt{5} + 11 - \sqrt{5}$
12. $\sqrt{12} + \sqrt{48}$
13. $\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{32}$
14. $11\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$
15. $7\sqrt{7} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{7} + \sqrt{3}$

Simplifica. Expresa como un número complejo usando " *i* " si es necesario.

16. $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}$
17. $7 + \sqrt{-25}$
18. $(4i)^2$
19. $i^2 \cdot i^3 \cdot i^4$
20. $\left(\sqrt{-4}\right)^3$
21. $(2i)(5i)^2$

Resuelve cada ecuación cuadrática sobre el conjunto de números complejos.

22. $x^2 + 100 = 0$

23. $t^2 + 24 = 0$

24. $x^2 - 6x + 13 = 0$

25. $r^2 - 2r + 5 = 0$

RENDIMIENTO

Tema: Resolver ecuaciones cuadráticas

Usa el discriminante para determinar la naturaleza de las raíces a la ecuación cuadrática.

26. $x^2 - 5x + 7 = 0$

27. $x^2 - 5x + 6 = 0$

28. $2x^2 - 5x + 5 = 0$

29. $x^2 + 7x + 2 = 0$

30. $2x^2 + 7x + 6 = 0$

31. $2x^2 + 7x + 7 = 0$

32. $2x^2 - 7x + 6 = 0$

33. $2x^2 + 7x - 6 = 0$

34. $x^2 + 6x + 9 = 0$

Resuelve las ecuaciones cuadráticas a continuación usando un método apropiado.

35. $m^2 + 15m + 56 = 0$

36. $5x^2 - 3x + 7 = 0$

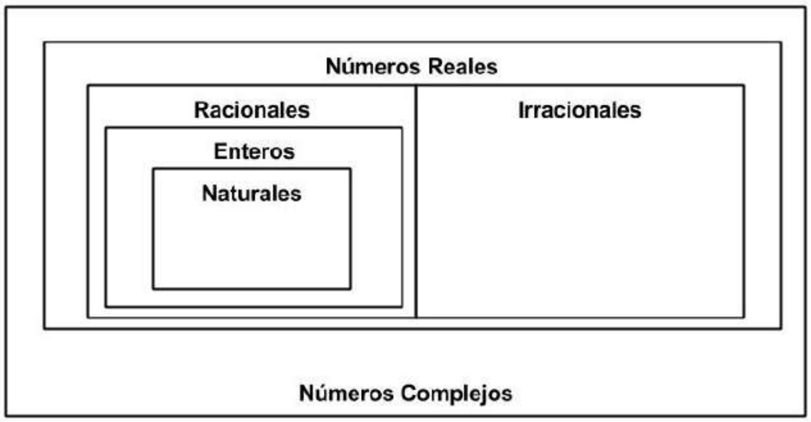
37. $x^2 - 10x + 21 = 0$

38. $6x^2 + 7x - 5 = 0$

3.10 Números Reales y Complejos

Actividad para Practicar Comprensión

Para encontrar soluciones a todas las ecuaciones cuadráticas, hemos tenido que extender el sistema numérico para incluir números complejos.



Haz lo siguiente para cada uno de los problemas al calce:

- Elije la mejor palabra para completar cada conjetura.
- Después de haber hecho una conjetura, crea al menos tres ejemplos para mostrar por qué tu conjetura es verdadera.
- Si encuentras un contraejemplo, cambia tu conjetura para que se ajuste a tu trabajo.

Conjetura #1: La suma de dos enteros es [siempre, a veces, nunca] un entero.

Conjetura #2: La suma de dos números racionales es [siempre, a veces, nunca] un número racional.

Conjetura #3: La suma de dos números irracionales es [siempre, a veces, nunca] un número irracional.

Conjeture #4: La suma de dos números reales es [siempre, a veces, nunca] un número real.

Conjeture #5: La suma de dos números complejos es [siempre, a veces, nunca] un número complejo.

Conjeture #6: El producto de dos enteros es [siempre, a veces, nunca] un entero.

Conjeture #7: El cociente de dos enteros es [siempre, a veces, nunca] un entero.

Conjeture #8: El producto de dos números racionales es [siempre, a veces, nunca] un número racional.

Conjeture #9: El cociente de dos números racionales es [siempre, a veces, nunca] un número racional.

Conjeture #10: El producto de dos números irracionales es [siempre, a veces, nunca] un número irracional.

Conjeture #11: El producto de dos números reales es [siempre, a veces, nunca] un número real.

Conjeture #12: El producto de dos números complejos es [siempre, a veces, nunca] un número complejo.

13. La relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro es dada por el número irracional π. ¿Pueden el diámetro de un círculo y la circunferencia del mismo círculo ser números racionales? Explica por qué sí o por qué no.

La aritmética de los polinomios

En la tarea, *Por Determinarse . . .* definimos los polinomios como expresiones de la siguiente forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots a_{n-3}x^3 + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

donde todos los exponentes son enteros positivos y todos los coeficientes $a_0 \ldots a_n$ son constantes.

Haz lo siguiente para cada uno de los problemas al calce:

- Elije la mejor palabra para completar cada conjetura.
- Después de haber hecho una conjetura, crea al menos tres ejemplos para mostrar por qué tu conjetura es verdadera.
- Si encuentras un contraejemplo, cambia tu conjetura para que se ajuste a tu trabajo.

Conjeture #P1: La suma de dos polinomios es [siempre, a veces, nunca] un polinomio.

Conjeture #P2: La diferencia de dos polinomios es [siempre, a veces, nunca] un polinomio.

Conjeture #P3: El producto de dos polinomios es [siempre, a veces, nunca] un polinomio.

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO | Nombre | Periodo | Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Atributos de funciones cuadráticas y otras funciones

1. Resume lo que has aprendido sobre las funciones cuadráticas hasta este punto. Además de tu explicación escrita, proporciona gráficas, tablas y ejemplos para ilustrar lo que sabes.

2. En trabajo anterior, aprendiste mucho sobre funciones lineales y exponenciales. Compara y contrasta funciones lineales y exponenciales con funciones cuadráticas. ¿Qué similitudes (si las hay) y qué diferencias existen entre las funciones lineales, exponenciales y cuadráticas?

PRÁCTICA

Tema: Operaciones en diferentes tipos de números

3. Los números naturales, ℕ, son los números que vienen de forma natural o los números que se cuentan. Como cualquier niño aprende primero los números, aprenden 1, 2, 3, … ¿Qué operación(es) en los números naturales causaría la necesidad de otros tipos de números? ¿Qué operación en los números naturales crea una necesidad de enteros o números racionales, etc.? (Da ejemplos y explica).

En cada uno de los problemas a continuación, utiliza los elementos dados para determinar si es *siempre* posible o no, *a veces* o *nunca* crear un nuevo elemento* que esté en el conjunto deseado.

4. Usando la operación de suma y elementos de los enteros, ℤ, se creará [siempre, a veces, nunca] un elemento de los números irracionales, $\overline{\mathbb{Q}}$. Explica.

5. Considera la ecuación $a - b = c$, donde $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$, c será un entero, ℤ [siempre, a veces, nunca]. Explica.

6. Considera la ecuación $a \div b = c$, donde $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$, entonces es $c \in \mathbb{Z}$ [siempre, a veces, nunca]. Explica.

** Los números en cualquier conjunto dado de números se pueden referir como elementos del conjunto. Por ejemplo, el conjunto de números racionales, ℚ, contiene elementos o números que se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son valores enteros (b≠0).*

7. Usando la operación de resta y elementos de los números irracionales, $\overline{\mathbb{Q}}$, un elemento de los números irracionales, $\overline{\mathbb{Q}}$, se creará [siempre, a veces, nunca]. Explica.

8. Si dos números complejos, $\mathbb{C}$, se restan, el resultado será [siempre, a veces, nunca] un número complejo, $\mathbb{C}$. Explica.

RENDIMIENTO

Tema: Resolver todo tipo de ecuaciones cuadráticas, simplificar raíces

Haz una predicción sobre la naturaleza de las soluciones para cada ecuación cuadrática (real, complejo, entero, etc.) luego resuelve cada una de las ecuaciones cuadráticas a continuación usando un método apropiado y eficiente. Da las soluciones y compáralas con tu predicción.

9. $-5x^2 + 3x + 2 = 0$

Predicción:

Soluciones:

10. $x^2 + 3x + 2 = 0$

Predicción:

Soluciones:

11. $x^2 + 3x - 12 = 0$

Predicción:

Soluciones:

12. $4x^2 - 19x - 5 = 0$

Predicción:

Soluciones:

Simplifica cada una de las expresiones radicales. Usa exponentes racionales si lo deseas.

13. $\sqrt[4]{81x^8y^{12}}$

14. $\sqrt{\frac{a^7b^{10}}{a^3}}$

15. $\sqrt[5]{625x^{12}}$

16. $(\sqrt{n})^5$

17. $\sqrt[3]{-27}$

18. $(\sqrt{8})(\sqrt{3^2})(2)$

Completa la tabla para que cada expresión se escriba en forma radical y con exponentes racionales.

	Forma radical	Forma exponencial
19.	$\sqrt[4]{8^3}$	
20.		$256^{\frac{3}{4}}$
21.	$\sqrt[4]{2^7 \bullet 4^5}$	
22.		$16^{\frac{3}{2}} \bullet 4^{\frac{1}{2}}$
23.	$\sqrt[10]{x^{23}y^{31}}$	
24.	$\sqrt[5]{64a^9b^{18}}$	

3.11 Dificultades Cuadráticas

Actividad para Desarrollar y Consolidar Comprensión

En la tarea *Rivalidad en el Borde de la Banqueta,* Carlos y Clarita estaban tratando de decidir cuánto deberían cobrar por una mascota para la entrada de automóviles. Aquí están los detalles importantes de lo que tuvieron que considerar.

- *Las encuestas muestran que los gemelos pueden vender 100 mascotas para la entrada de automóviles a un costo de $ 20 y venderán 10 mascotas menos por cada $ 5 adicionales que cobren.*
- *Los gemelos estiman que el costo de los suministros será de $ 250 y les gustaría obtener $ 2000 en ganancias por la venta de mascotas para la entrada de automóviles. Por lo tanto, deberán recaudar $ 2250 en ingresos.*

Esta información llevó a Carlos y Clarita a escribir y resolver la ecuación cuadrática:

$$(100-10x)(20+5x)=2250\,.$$

1. Revisa tu trabajo de *Rivalidad en el Borde de la Banqueta* o resuelve *x* en esta ecuación cuadrática nuevamente.

2. ¿Qué significan tus soluciones para *x* en términos del contexto de la historia?

3. ¿Cómo cambiaría tu solución si esta hubiera sido la pregunta de Carlos y Clarita: "¿Cuánto deberíamos cobrar si queremos obtener al menos $ 2250 en ingresos?"

4. ¿Qué pasa con esta pregunta: "¿Cuánto deberíamos cobrar si queremos maximizar nuestros ingresos?"

Como probablemente observaste, la situación representada en la pregunta 3 no tenía una sola solución, ya que hay muchos precios diferentes que los gemelos pueden cobrar para obtener más de $ 2250 en ingresos. Algunas veces nuestras preguntas conducen a desigualdades cuadráticas en lugar de ecuaciones cuadráticas.

Aquí hay otra desigualdad cuadrática basada en tu trabajo sobre *Rivalidad en el Borde de la Banqueta.*

5. Carlos y Clarita quieren diseñar un logotipo que requiera menos de 48 in^2 de pintura, y que quepa dentro de un rectángulo que es 8 pulgadas más largo que ancho. ¿Cuáles son las dimensiones posibles del logotipo rectangular?

De nuevo, la pregunta 5 tiene múltiples respuestas, y esas respuestas están restringidas por el contexto. Examinemos la desigualdad que escribiste para la pregunta 5, pero no restringida por el contexto.

6. ¿Cuáles son las soluciones para la desigualdad $x(x+8) < 48$?

7. ¿Cómo podrías apoyar tu respuesta a la pregunta 6 con una gráfica o una tabla?

Aquí hay algunas desigualdades cuadráticas más, sin contextos. Muestra cómo puedes usar una gráfica, junto con álgebra, para resolver cada una de ellas.

8. $x^2 + 3x - 10 \geq 0$

9. $2x^2 - 5x < 12$

10. $x^2 - 4 \leq 4x + 1$

Carlos y Clarita usaron álgebra y una gráfica para resolver la pregunta 10, pero ambos lo hicieron de diferentes maneras. Ilustra cada uno de sus métodos con una gráfica y con álgebra.

11. Carlos: "Reescribí la desigualdad para obtener 0 en un lado y una forma factorizada en el otro. Encontré los ceros para cada uno de mis factores. Para decidir qué valores de x tenían sentido en la desigualdad, también dibujé una gráfica de la función cuadrática que estaba relacionada con la expresión cuadrática en mi desigualdad. Sombreé las soluciones para x en función de la información de mi gráfica. "

12. Clarita: "Representé una función lineal y una función cuadrática relacionada con las expresiones lineales y cuadráticas en la desigualdad. De la gráfica pude estimar los puntos de intersección, pero para ser más exacta, resolví la ecuación cuadrática $x^2 - 4 = 4x + 1$ escribiendo una ecuación equivalente que tenía 0 en un lado. Una vez que conocí los valores de x de los puntos de intersección en la gráfica, pude sombrear las soluciones para x que hicieron verdadera la desigualdad. "

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO | Nombre | Periodo | Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Factorización de polinomios

Factoriza cada uno de los polinomios por completo.

1. $x^2 + x - 12$
2. $x^2 - 2x - 8$
3. $x^2 + 5x - 14$
4. $x^2 - x - 6$
5. $x^2 + 6x + 9$
6. $x^2 - 7x+10$
7. $2x^2 - 9x - 5$
8. $3x^2 - 3x - 18$
9. $2x^2 + 8x - 42$

10. ¿De qué manera es útil la forma factorizada de una ecuación cuadrática cuando se grafica la parábola?

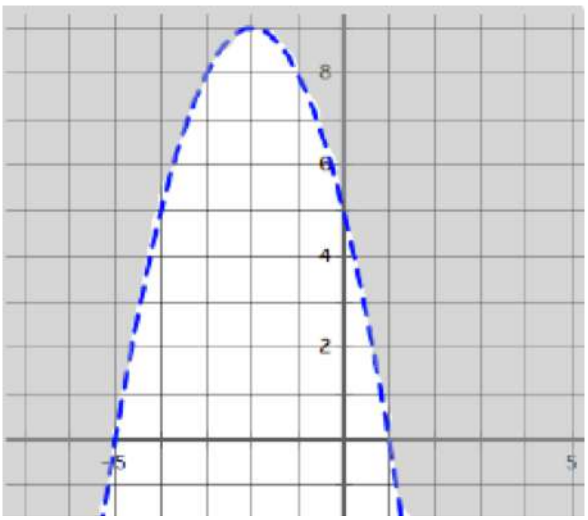
PRÁCTICA

Tema: Resolver desigualdades cuadráticas.

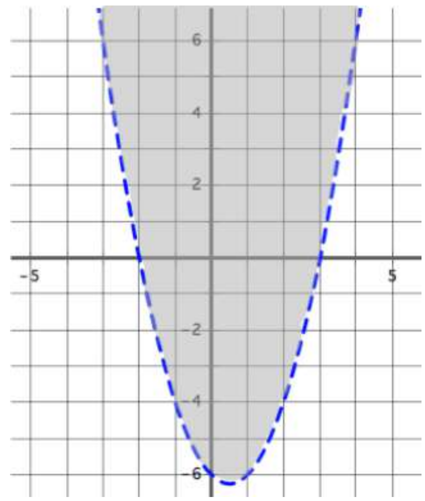
11. $x^2 + x - 12 > 0$
12. $x^2 - 2x - 8 \leq 0$
13. $x^2 + 5x - 14 \geq 0$
14. $2x^2 - 9x - 5 \geq 0$
15. $3x^2 - 3x - 18 < 0$
16. $x^2 + 4x - 21 < 0$
17. $x^2 - 4x \leq 0$
18. $x^2 \leq 25$
19. $x^2 - 4x \leq 5$

Relaciona cada gráfica con su desigualdad.

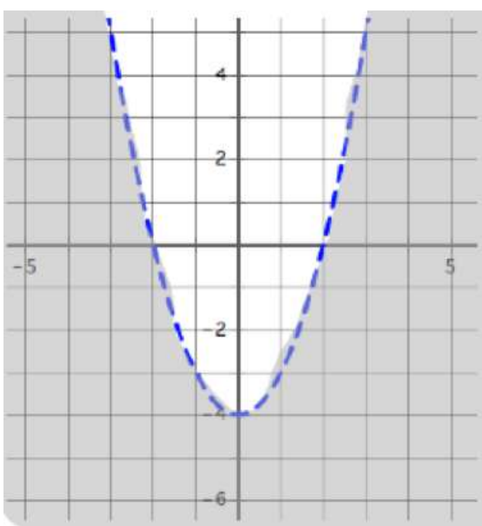
<table>
<tr>
<td>a.



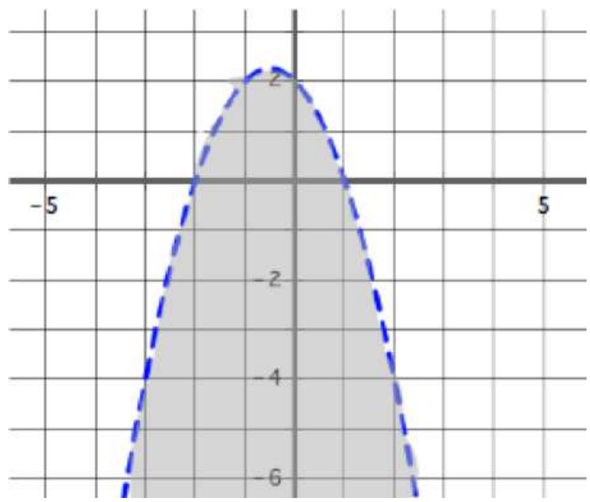
</td>
<td>b.



</td>
</tr>
<tr>
<td>c.



</td>
<td>d.



</td>
</tr>
<tr>
<td>20. $y > x^2 - x - 6$</td>
<td>21. $y < x^2 - 4$</td>
</tr>
<tr>
<td>22. $y < (x + 2)(1 - x)$</td>
<td>23. $y > 5 - 4x - x^2$</td>
</tr>
</table>

RENDIMIENTO

Tema: Forma de vértice de ecuaciones cuadráticas

Escribe cada función cuadrática a continuación en forma de vértice.

24. $f(x) = x^2 + 6x + 5$

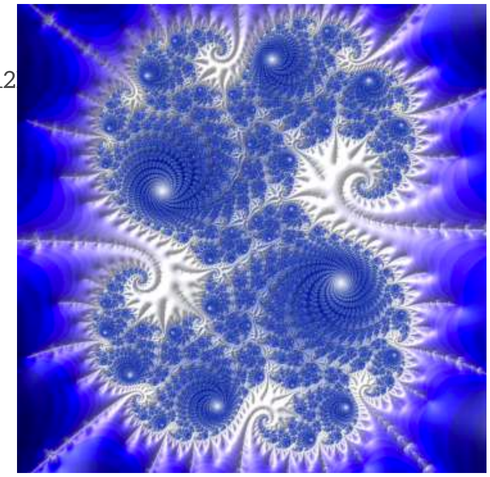
25. $f(x) = (x + 3)(x - 5)$

26. $f(x) = (x - 2)(x + 6)$

27. $f(x) = x^2 - 12x + 20$

28. $f(x) = 2x^2 + 16x + 8$

29. $f(x) = x^2 - 2x - 8$

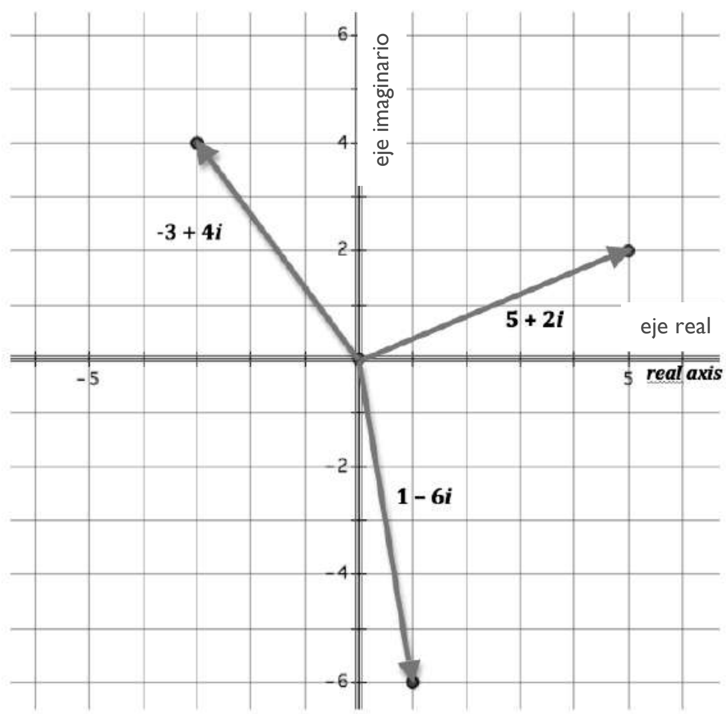


3.12H Cálculos Complejos

Actividad para Consolidar Comprensión

Es útil ilustrar la aritmética de números complejos usando una representación visual. Para hacerlo, presentaremos el plano complejo.

Como se muestra en la figura siguiente, el plano complejo consiste en un eje horizontal que representa el conjunto de números reales y un eje vertical que representa el conjunto de números imaginarios. Ya que un número complejo $a + bi$ tiene tanto un componente real como un componente imaginario, se puede representar como un punto en el plano con coordenadas (a, b). También se puede representar mediante un vector de posición con su cola ubicada en el punto $(0, 0)$ y su cabeza ubicada en el punto (a, b), como se muestra en el diagrama. Será útil poder avanzar y retroceder entre las dos representaciones geométricas de un número complejo en el plano complejo, —a veces representando el número complejo como un único punto, y a veces como un vector.



Es posible que desees revisar la tarea de Matemáticas I, Nivel Secundaria, La Aritmética de los Vectores, para que puedas aprovechar esas ideas en la siguiente tarea.

El módulo de un número complejo

A menudo, es útil poder comparar la magnitud de dos números diferentes. Por ejemplo, recolectar $ 25 en ingresos no pagará una deuda de $ 45, ya que $|25| < |-45|$. Ten en cuenta que en este ejemplo usamos el valor absoluto de los números con signo para comparar la magnitud de los ingresos y la deuda. Ya que -45 está más lejos de 0 que 25, en una recta numérica real; la deuda es mayor que los ingresos. De forma similar, podemos comparar las magnitudes relativas de los números complejos determinando qué tan lejos se encuentran del origen, el punto (0, 0), en el plano complejo. Nos referimos a la magnitud de un número complejo como su módulo, y simbolizamos esta longitud con la notación $|a + bi|$.

1. Encuentra el módulo de cada uno de los números complejos que se muestran en la figura de arriba.

2. Establece una regla, ya sea en palabras o usando notación algebraica, para encontrar el módulo de cualquier número complejo $a + bi$.

Sumar y restar números complejos

3. Experimenta con la representación vectorial de números complejos para desarrollar y justificar una regla algebraica para sumar dos números complejos: $(a + bi) + (c + di)$. ¿De qué manera tus representaciones de la suma de vectores en el plano complejo ayudan a explicar tu regla algebraica para sumar números complejos?

4. ¿Cómo representarías el inverso aditivo de un número complejo en el plano complejo? ¿Cómo representarías el aditivo inverso algebraicamente?

5. Si consideramos que la resta es agregar el inverso aditivo de un número, usa la representación vectorial de números complejos para desarrollar y justificar una regla algebraica para restar dos números complejos: $(a + bi) - (c + di)$. ¿De qué manera tus representaciones del inverso aditivo de un número complejo y la suma de vectores en el plano complejo ayudan a explicar su regla algebraica para restar números complejos?

Multiplicar números complejos

Una forma de pensar acerca de la multiplicación en el plano complejo es tratar el primer factor en la multiplicación como un factor de escala.

6. Proporciona algunos ejemplos de multiplicar un número complejo por un factor de escala de número real: $a(c + di)$. Por ejemplo, ¿qué ocurre con la representación vectorial de un número complejo cuando el factor de escala a es 4? ¿½? ¿-2?

7. Proporciona algunos ejemplos de multiplicar un número complejo por un factor de escala imaginaria: $bi(c + di)$. Por ejemplo, ¿qué ocurre con la representación vectorial cuando el factor de escala bi es i? ¿$2i$? ¿$-3i$?

8. Experimenta con la representación vectorial de números complejos para justificar la siguiente regla para multiplicar números complejos:

$$(a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

9. ¿Cómo aparecen las observaciones geométricas que hiciste en la pregunta 6, pregunta 7 y pregunta 3 en esta tarea?

El conjugado de un número complejo

El conjugado de un número complejo $a + bi$ es el número complejo $a - bi$. El conjugado de un número complejo se representa con la notación $\overline{a + bi}$.

10. Ilustra un ejemplo de un número complejo y su conjugado en el plano complejo usando representaciones de vectores.

11. Ilustra la búsqueda de la suma de un número complejo y su conjugado en el plano complejo utilizando representaciones de vectores.

12. Ilustra la búsqueda del producto de un número complejo y su conjugado en el plano complejo utilizando representaciones de vectores. (Usa las observaciones geométricas que hiciste en las preguntas 6-8 para guiar tu trabajo).

13. Si z es un número complejo y $\bar{z}$ es su conjugado, ¿cómo se relacionan los módulos $|z|$ y $|\bar{z}|$?

14. Usa un argumento geométrico o algebraico para completar y justificar las siguientes afirmaciones para cualquier número complejo $a + bi$:

    - La suma de un número complejo y su conjugado es siempre el número real __________.

    - El producto de un número complejo y su conjugado es siempre el número real _________.

La división de números complejos

Dividir un número complejo por un número real es lo mismo que multiplicar el número complejo por el inverso multiplicativo del divisor. O sea, $\frac{a+bi}{c} = \frac{1}{c}(a+bi) = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}i$. Por lo tanto, se puede pensar en la división de un número complejo por un número real en términos de multiplicar el número complejo por un factor de escala de valor real, una idea que exploramos en la pregunta 6.

También hemos observado que multiplicar un número complejo por su conjugado siempre nos da como resultado un número real. Hacemos uso de este hecho para cambiar un problema que involucra la división por un número complejo en un problema equivalente en el que el divisor es un número real.

15. Explica por qué $\frac{a+bi}{c+di}$ es equivalente a $\frac{(a+bi)}{(c+di)} \cdot \frac{(c-di)}{(c-di)}$.

16. Usa esta idea para encontrar el cociente $\frac{3+5i}{4+2i}$.

Hemos estado utilizando una representación vectorial de números complejos en el plano complejo en los problemas anteriores. En los siguientes problemas representaremos números complejos simplemente como puntos en el plano complejo.

Encuentra la distancia entre dos números complejos

Para encontrar la distancia entre dos puntos en una recta numérica real, encontramos el valor absoluto de la diferencia entre sus coordenadas. (Ilustra esta idea con un par de ejemplos).

De manera similar, definimos la distancia entre dos números complejos en el plano complejo como el módulo de la diferencia entre ellos.

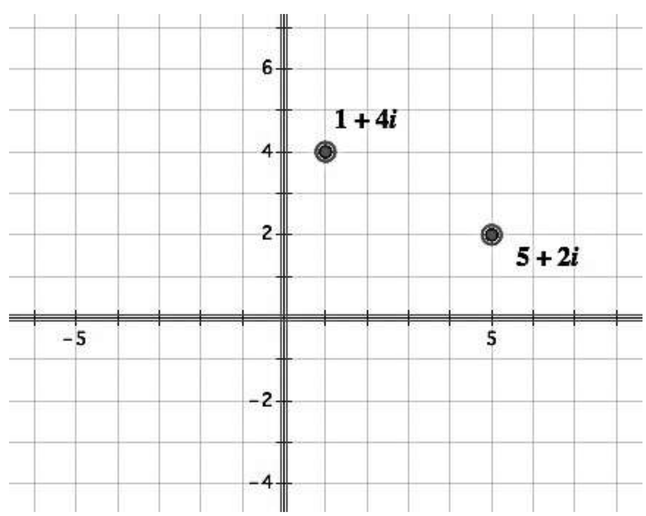
17. Encuentra la distancia entre los dos números complejos trazados en el plano complejo a continuación.

Encuentra el promedio de dos números complejos

El promedio de dos números reales $\frac{x_1 + x_2}{2}$ está ubicado en el punto medio del segmento que conecta los dos números reales en la recta numérica real. (Ilustra esta idea con un par de ejemplos).

De manera similar, definimos el promedio de dos números complejos como el punto medio del segmento que conecta los dos números complejos en el plano complejo.

18. Encuentra el promedio de los dos números complejos trazados en el plano complejo a continuación.



3.12H

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Resolver sistemas de ecuaciones lineales

Resuelve cada sistema de ecuaciones usando sustitución.

1. $\begin{cases} y = 3x \\ y = -2x - 15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + y = 21 \\ y = -2x - 15 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$

Resuelve cada sistema de ecuaciones usando eliminación.

4. $\begin{cases} 5x - y = 13 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x + y = 21 \\ -3x + 5y = -3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Crea una matriz aumentada para cada sistema de ecuaciones y luego usa reducciones de filas para resolver el sistema.

7. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ -3x + 5y = -3 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x - y = 13 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$

PRÁCTICA

Tema: Operaciones con números imaginarios

Realiza las operaciones indicadas en los números complejos.

10. $(3+4i)+(2-5i)$

11. $(6-4i)-(7+2i)$

12. $3(5+2i)$

13. $(9-2i)(1+3i)$

14. $4(3-2i)-(5+3i)$

15. $(2-5i)(2+5i)$

Usa el conjugado de cada denominador para racionalizar los denominadores y escribir una fracción equivalente.

16. $\dfrac{3-5i}{2+5i}$

17. $\dfrac{6+7i}{4-3i}$

18. $\dfrac{2-3i}{1-6i}$

Encuentra el módulo para cada número complejo.

19. $3-5i$

20. $4-3i$

21. $-4+3i$

22. Si la representación gráfica de las operaciones entre dos números complejos resulta en un valor a lo largo del eje de y o el *eje imaginario*, ¿qué debe ser cierto acerca de los dos números complejos?

23. Si la representación gráfica de las operaciones entre dos números complejos da como resultado un valor a lo largo del eje de x o *eje del número real*, ¿qué debe ser cierto acerca de los dos números complejos?

RENDIMIENTO

Tema: Resolución de ecuaciones cuadráticas

24. Enumera las estrategias que se pueden usar para resolver ecuaciones cuadráticas. Explica cuándo cada una de las estrategias sería más eficiente. Da un ejemplo de una ecuación cuadrática que se resolvería más eficientemente para cada uno.

Resuelve las ecuaciones cuadráticas a continuación usando un método apropiado.

25. $x^2 + 9x + 18 = 0$

26. $x^2 - 2x - 3 = 0$

27. $2x^2 - 5x + 3 = 0$

28. $(x - 2)(x + 3) = 0$

29. $10x^2 - x + 9 = 0$

30. $(x - 2)^2 = 20$

3.13H ¡Todos los Sistemas Funcionan!


CC BY NASA
https://flic.kr/p/9y3n6n

Actividad para Consolidar Comprensión

A Carlos le gusta comprar suministros para su negocio *Rivalidad en el Borde de la Banqueta* en la tienda de pintura *All a Dollar Paint Store,* donde el precio de cada artículo es un múltiplo de $. Esto facilita el seguimiento del costo total de sus compras. A Clarita le preocupa que los artículos en la tienda de pintura *All a Dollar Paint Store* puedan costar más, por lo que revisará los registros para ver cuánto paga Carlos por los diferentes suministros. Desafortunadamente, Carlos una vez más se olvidó de anotar el costo de cada artículo que compró. En cambio, solo ha registrado lo que compró y el costo total de todos los artículos.

Carlos y Clarita están tratando de calcular el costo de un galón de pintura, el costo de una brocha y el costo de un rollo de cinta adhesiva en base a las siguientes compras:

Semana 1: Carlos compró 2 galones de pintura y 1 rollo de cinta adhesiva por $ 30.
Semana 2: Carlos compró 1 galón de pintura y 4 brochas por $ 20.
Semana 3: Carlos compró 2 brochas y 1 rollo de cinta adhesiva por $ 10.

1. Determina el costo de cada artículo usando la estrategia que desees. Muestra los detalles de tu trabajo para que otra persona pueda seguir tu estrategia.

Probablemente hayas reconocido que este problema podría representarse como un sistema de ecuaciones. En cursos de matemáticas anteriores has desarrollado varios métodos para resolver sistemas.

2. ¿Cuál de los métodos que has desarrollado para resolver sistemas de ecuaciones podría aplicarse a este sistema? ¿Qué métodos parecen más problemáticos? ¿Por qué?

En matemáticas I, Nivel Secundaria: Tareas para Comercializar con Matrices y resolver Sistemas con Matrices, aprendiste cómo resolver sistemas de ecuaciones que involucran dos ecuaciones y dos cantidades desconocidas utilizando reducción de matrices por filas. Es posible que desees revisar esas dos tareas antes de continuar.

3. Modifica la estrategia de "reducción de matrices por filas" para que puedas usarla para resolver el sistema de ecuaciones de Carlos y Clarita utilizando la reducción por filas. ¿Qué modificaciones tuviste que hacer y por qué?

En la secuencia de tareas de MVP Matemáticas I Nivel Secundaria: Más Aritmética de Matrices, Cómo resolver Sistemas con Matrices y El Determinante de una Matriz, aprendiste a resolver estos mismos tipos de sistemas utilizando la multiplicación de matrices. Es posible que desees revisar esas tareas antes de continuar.

4. Multiplica los siguientes pares de matrices:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. ¿Qué propiedad se ilustra con la multiplicación en la pregunta 4a?

6. ¿Qué propiedad se ilustra con la multiplicación en la pregunta 4b?

7. Reescribe el siguiente sistema de ecuaciones que representa el problema de Carlos y Clarita, como una ecuación de matriz en la forma **AX = B** donde **A**, **X** y **B** son todas matrices.

$$\begin{aligned} 2g + 0b + 1t &= 30 \\ 1g + 4b + 0t &= 20 \\ 0g + 2b + 1t &= 10 \end{aligned}$$

8. Resuelve tu ecuación de matriz usando la multiplicación de matrices. Muestra los detalles de tu trabajo para que alguien más pueda seguirlo.

Pudiste resolver esta ecuación usando la multiplicación de matrices porque se te dio el inverso de la matriz **A**. A diferencia de matrices 2×2, donde el inverso de la matriz puede encontrarse fácilmente usando el método descrito en *Más Aritmética de Matrices*, los inversos de $n \times n$ en general pueden ser difíciles de encontrar manualmente. En tales casos, usaremos la tecnología para encontrar la matriz inversa, de modo que este método se pueda aplicar a todos los sistemas lineales que impliquen n ecuaciones y n cantidades desconocidas.

3.13H

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO | Nombre | Periodo | Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Revisión de exponentes racionales y métodos para resolver ecuaciones cuadráticas

Escribe cada expresión exponencial en forma radical.

1. $10^{\frac{3}{2}}$
2. $x^{\frac{1}{5}}$
3. $3n^{\frac{1}{3}}$
4. $6^{\frac{2}{7}}$
5. $7^{\frac{5}{3}}$
6. $t^{\frac{4}{5}}$

Escribe cada expresión radical en forma exponencial.

7. $\sqrt[5]{3}$
8. $\sqrt[6]{7a}^{\,5}$
9. $\sqrt{x^3}$
10. $\sqrt[3]{n^5}$
11. $\left(\sqrt[y]{n}\right)^x$
12. $\sqrt[p]{n^q}$

Explica cada estrategia para resolver ecuaciones cuadráticas y explica las circunstancias en las que la estrategia es más eficiente.

13. Graficar
14. Factorizar
15. Completar el cuadrado

16. ¿Qué otras estrategias conoces para resolver ecuaciones cuadráticas? ¿Cuándo las usarías?

PRÁCTICA

Tema: Solución de sistemas con tres incógnitas

Resuelve el sistema de ecuaciones usando matrices. Crea una ecuación de matriz para el sistema de ecuaciones que se pueda usar para encontrar la solución. Luego encuentra la matriz inversa y úsala para resolver el sistema.

17. $\begin{cases} 2x - 4y + z = 0 \\ 5x - 4y - 5z = 12 \\ 4x + 4y + z = 24 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + 2y + 5z = -15 \\ x + y - 4z = 12 \\ x - 6y + 4z = -12 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4p + q - 2r = 5 \\ -3p - 3q - 4r = -16 \\ 4p - 4q + 4r = -4 \end{cases}$

20. $\begin{cases} -6x - 4y + z = -20 \\ -3x - y - 3z = -8 \\ -5x + 3y + 6z = -4 \end{cases}$

RENDIMIENTO

Tema: Resolver ecuaciones cuadráticas

Resuelve cada una de las ecuaciones cuadráticas a continuación utilizando un método apropiado y eficiente.

21. $x^2 - 5x = -6$

22. $3x^2 - 5 = 0$

23. $5x^2 - 10 = 0$

24. $x^2 + 1x - 30 = 0$

25. $x^2 + 2x = 48$

26. $x^2 - 3x = 0$