

Transforming Mathematics Education

SECONDARY MATH TWO

An Integrated Approach

MODULO 7

Círculos: Una Perspectiva Geométrica

MATHEMATICSVISIONPROJECT.ORG

The Mathematics Vision Project

Scott Hendrickson, Joleigh Honey, Barbara Kuehl, Travis Lemon, Janet Sutorius

© 2017 Mathematics Vision Project

All Rights Reserved

MÓDULO 7 - TABLA DE CONTENIDO

Círculos: Una Perspectiva Geométrica

7.1 Centrado – Actividad para Desarrollar Comprensión

La búsqueda de centros de rotación utilizando bisectrices perpendiculares como herramienta (G.C.2)

Tarea: PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Círculos: Una Perspectiva Geométrica 7.1

7.2 Dilataciones de Círculos – Actividad para Consolidar Comprensión

Comprobación de círculos similares (G.C.1)

Tarea: PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Círculos: Una Perspectiva Geométrica 7.2

7.3 Polígonos Cíclicos – Actividad para Consolidar Comprensión

Examinando las relaciones entre ángulos centrales, ángulos inscritos, ángulos circunscritos y sus arcos (G.C.2, G.C.3, G.C.4)

Tarea: PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Círculos: Una Perspectiva Geométrica 7.3

7.4 Planear el Quiosco (Gazebo) – Actividad para Desarrollar Comprensión

Desarrollar fórmulas para el perímetro y el área de polígonos regulares (G.GMD.1)

Tarea: PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Círculos: Una Perspectiva Geométrica 7.4

7.5 De Polígonos a Círculos – Actividad para Consolidar Comprensión

Justificación de fórmulas para circunferencia y área de círculos usando argumentos límite intuitivos (G.GMD.1)

Tarea: PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Círculos: Una Perspectiva Geométrica 7.5

7.6 Razonamiento Circular – Actividad para Practicar Comprensión

Aplicando y practicando relaciones de Círculo (G.C.2)

Tarea: PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Círculos: Una Perspectiva Geométrica 7.6

7.7 π (pi). – Actividad para Desarrollar Comprensión

Usar el razonamiento proporcional para calcular la longitud del arco y el área de los sectores (G.C.5)

Tarea: PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Círculos: Una Perspectiva Geométrica 7.7

7.8 Jardín Redondo de Madison – Actividad para Practicar y Desarrollar Comprensión

Usar la proporción entre la longitud del arco y el radio para desarrollar radianes como una forma de medir ángulos (G.C.5)

Tarea: PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Círculos: Una Perspectiva Geométrica 7.8

7.9 Rayos y Radianes – Actividad para Consolidar y Practicar Comprensión

Conversión entre medida de grado y medida de radián de un ángulo (G.C.5)

Tarea: PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Círculos: Una Perspectiva Geométrica 7.9

7.10 Castillos de Arena – Actividad para Consolidar Comprensión

Examinar las relaciones de proporcionalidad de longitudes, áreas y volúmenes cuando las figuras geométricas se amplían (G.GMD.1, G.GMD.3)

Tarea: PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Círculos: Una Perspectiva Geométrica 7.10

7.11 Huellas en la Arena – Actividad para Consolidar Comprensión

Examinación informal, disección de argumentos para las fórmulas de volumen de prismas, pirámides y cilindros (G.GMD.1, G.GMD.3)

Tarea: PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Círculos: Una Perspectiva Geométrica 7.11

7.12 Cavalieri al Rescate – Actividad para Consolidar Comprensión

Examinando argumentos informales y disección de argumentos basados en el principio de Cavalieri para las fórmulas de volumen de prismas oblicuos, pirámides y cilindros (G.GMD.2)

Tarea: PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO. Círculos: Una Perspectiva Geométrica 7.12

7.1 ¡Centrado!

Actividad para Desarrollar Comprensión

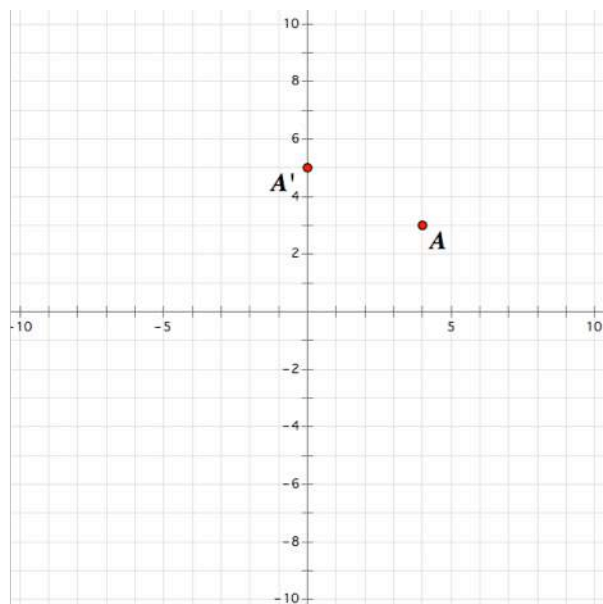


CC BY Charles Knowles
<https://flic.kr/p/8byVgx>

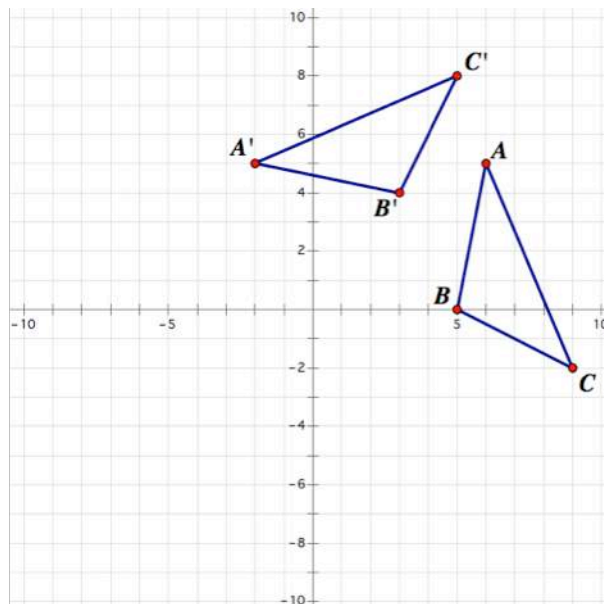
Travis y Tehani saben cómo construir la imagen de una rotación cuando se les da el centro y el ángulo de rotación, pero hoy se han encontrado con un problema diferente: ¿cómo se encuentra el centro de rotación cuando se da una imagen girada y su imagen previa? Deciden explorar esta idea con sus amigos, Carlos y Clarita.

Cada par de amigos crea un "rompecabezas" para el otro par, haciendo un dibujo en papel cuadriculado en el que se muestra una rotación de una figura, pero el centro de rotación no está marcado. El otro par tiene que averiguar dónde se encuentra el centro de rotación. Aquí están los "rompecabezas" que crearon el uno para el otro.

Rompecabezas de Travis y Tehani



Rompecabezas de Carlos y Clarita



Carlos y Clarita piensan que el rompecabezas que se les ha dado es demasiado fácil, ya que solo consiste en un solo punto girado y su imagen previa.

Carlos: "El centro de rotación está en el punto medio $(2,4)$, a la mitad entre la imagen y los puntos de la imagen previa, y el punto se ha girado 180° ."

Clarita no está de acuerdo: "El centro de rotación está en el punto $(0, 0)$ ya que tanto la imagen como los puntos de la imagen previa están a 5 unidades del origen. Tendré que usar un transportador para encontrar el ángulo de rotación".

Riendo, Tehani dice, "Ambos están equivocados. No usamos $(2, 4)$ ni $(0, 0)$ como centro de rotación cuando creamos el rompecabezas".

Carlos responde: "Puedo ver cómo nuestros dos puntos pueden ser el centro de rotación, pero ahora creo que con un solo par de puntos de la imagen/imagen previa, *cualquier* punto puede ser el centro de rotación".

1. Este rompecabezas ha resultado ser más desafiante de lo que pensaban Carlos y Clarita. Enumera al menos tres puntos adicionales que podrían considerarse el centro de rotación y justifica tus elecciones.
2. ¿Qué piensas sobre la última declaración de Carlos, "¿Cualquier punto puede ser el centro de rotación?" ¿Estás de acuerdo o en desacuerdo? Si estás de acuerdo, explica. Si no estás de acuerdo, ¿cuál sería una mejor declaración sobre el conjunto de puntos que se pueden usar como centro de rotación para un solo punto girado y su imagen previa?

3. Ahora examina el rompecabezas que Carlos y Clarita le dieron a Travis y Tehani. Encuentra el centro de rotación para este rompecabezas; o, si crees que puede haber más de un centro de rotación, describe cómo se relacionan todos los posibles centros de rotación.

4. En la página siguiente, describe e ilustra tu proceso para encontrar el centro de rotación de una figura que consista de varios pares de puntos de imágenes/imágenes previas. Si haces alguna reclamación en tu descripción, asegúrate de proporcionar una prueba de tus reclamaciones. Usa el vocabulario matemático correcto. Aquí hay algunas palabras y sus definiciones para términos asociados con círculos. Algunos de estos términos pueden ser útiles en tu descripción escrita de cómo encontrar el centro de rotación.

(Nota: No todas estas palabras serán útiles para responder la pregunta 4, pero serán útiles en tareas futuras, por lo que se ofrecen aquí como referencia).

- **Círculo:** el conjunto de todos los puntos en un plano equidistante de un punto fijo llamado centro del círculo.
- **Círculos concéntricos:** un conjunto de círculos diferentes que comparten el mismo centro.
- **Cuerda:** un segmento de línea cuyos puntos finales se encuentran en un círculo.
- **Secante:** una línea que cruza un círculo exactamente en dos puntos.
- **Tangente:** una línea que cruza un círculo en exactamente un punto.
- **Diámetro:** una línea recta que pasa por el centro de un círculo.

- *Radio*: un segmento de línea con un punto final en el centro de un círculo y el otro punto final en el círculo.

Nota: las palabras radio y diámetro también se usan para referirse a las longitudes de estos segmentos.

- *Arco*: parte de un círculo.
- *Ángulo central*: un ángulo cuyo vértice está en el centro de un círculo y cuyos lados pasan por un par de puntos en el círculo.
- *Ángulo inscrito*: ángulo formado cuando dos líneas secantes, o una línea secante y tangente, se cruzan en un punto de un círculo.
- *Arco interceptado*: la parte de un círculo que se encuentra entre dos líneas, rayos o segmentos de línea que cruzan el círculo.

Mi proceso para encontrar el centro de rotación de una figura que consta de varios pares de puntos de imágenes/imágenes previas:

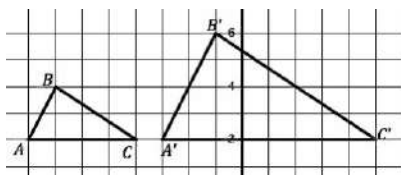
5. Demuestra el siguiente teorema: *En un círculo, la bisectriz perpendicular de una cuerda divide en dos el ángulo central formado por los radios dibujados hacia los puntos finales de la cuerda.*

PREPARACIÓN

Tema: Factor de escala, Centro de dilatación

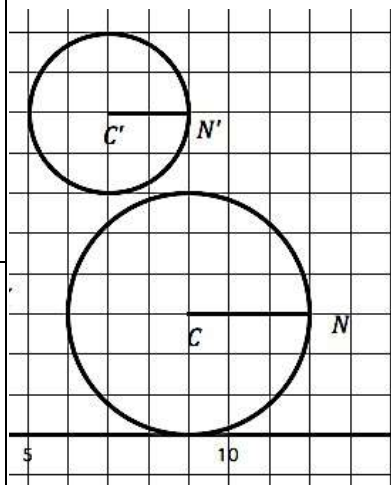
Para cada imagen previa e imagen, determina el factor de escala entre las dos figuras.

1.



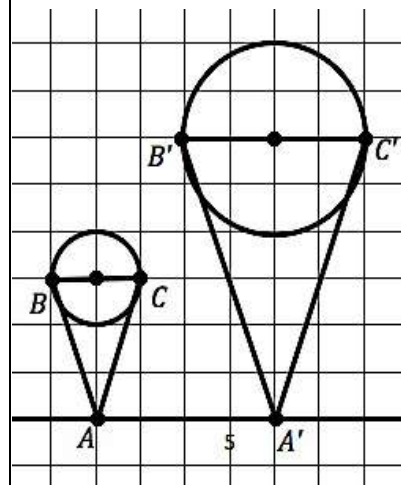
Factor de escala:

2.



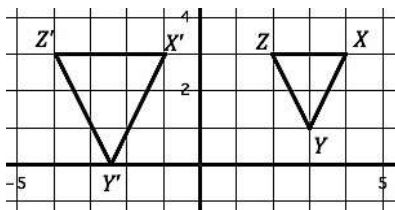
Factor de escala:

3.



Factor de escala:

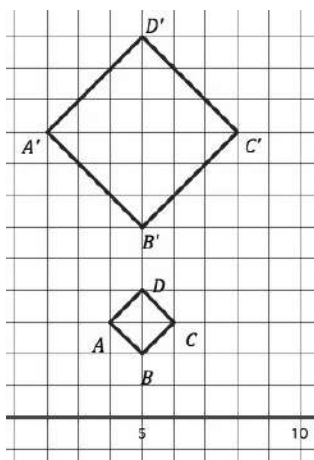
4.



Factor de escala:

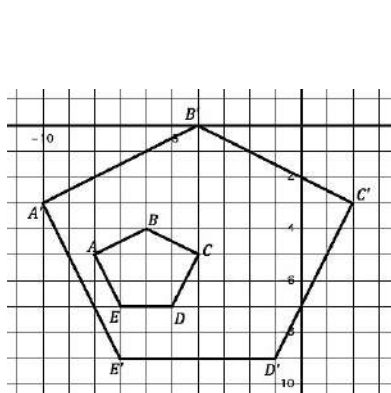
Cada imagen previa a continuación, es el resultado de una dilatación. Para cada par de figuras dadas, determina las coordenadas del *centro de dilatación*.

5.



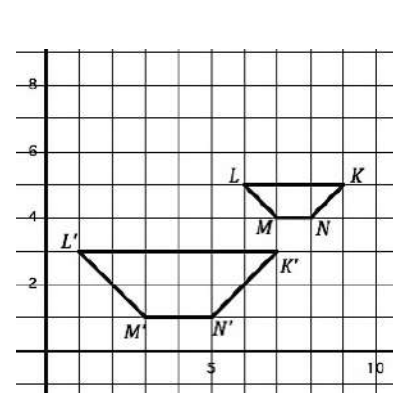
Centro de dilatación:

6.



Centro de dilatación:

7.



Centro de dilatación:

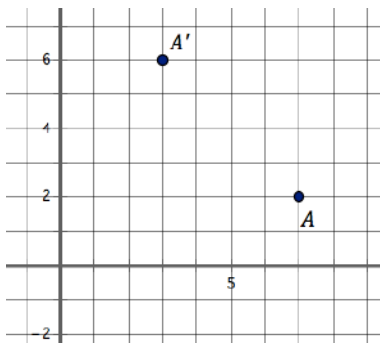
Need help? Visit www.rsgsupport.org

PRÁCTICA

Tema: Encontrar el centro de rotación

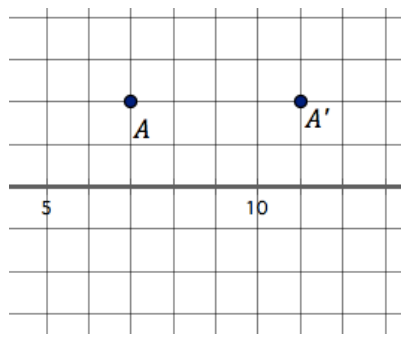
En cada figura, encuentra y marca al menos cuatro posibles centros de rotación que funcionarían para hacer girar el punto de la imagen hasta el punto de la imagen previa.

8.



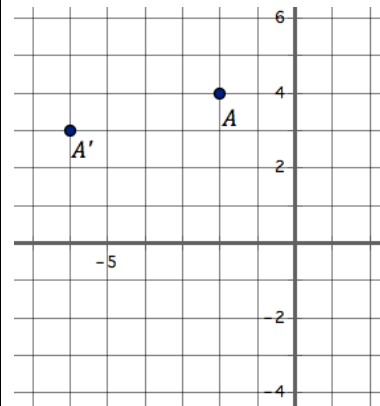
Centros de rotación:

9.



Centros de rotación:

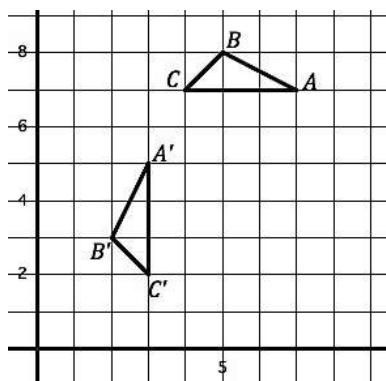
10.



Centros de rotación:

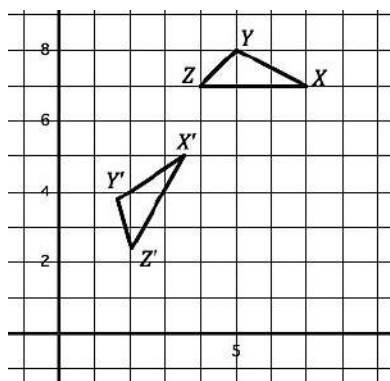
En cada figura a continuación, se realizó una rotación para producir la imagen, encuentra el centro de rotación.

12.



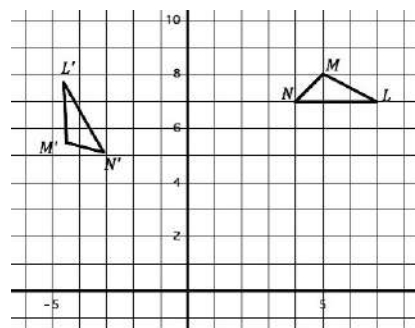
Centro de rotación:

13.



Centro de rotación:

14.



Centro de rotación:

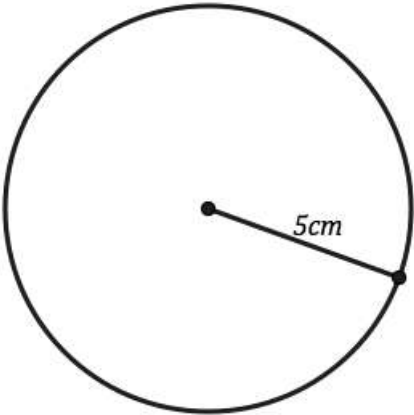
Need help? Visit www.rsgsupport.org

RENDIMIENTO

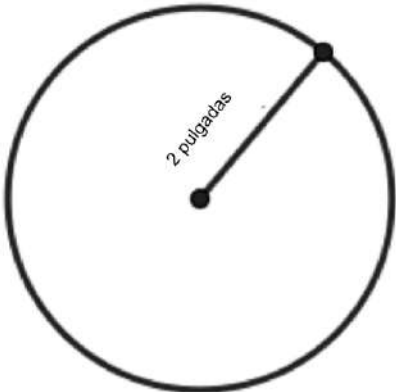
Tema: Encontrar circunferencia y áreas de círculos

Encuentra el área y la circunferencia de los círculos dados.

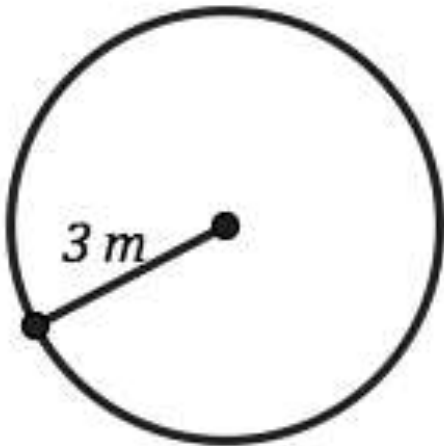
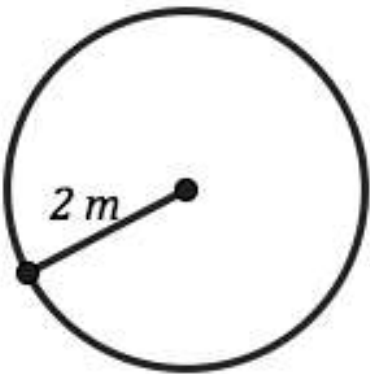
15.



16.



17. Encuentra la circunferencia y el área para los círculos a continuación y compara los resultados cuidadosamente.



Radio	1m	2m	3m
Área			
Circunferencia			

¿Cómo se comparan?

Need help? Visit www.rsgsupport.org



CC BY Trevor Leyenhorst
<https://flic.kr/p/5BYF3D>

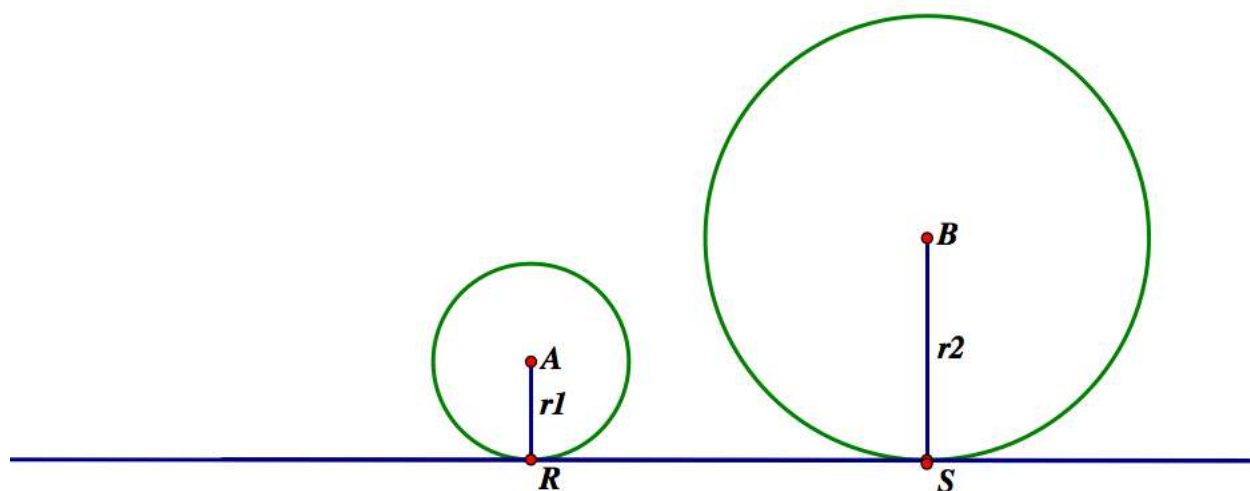
7.2 Dilataciones de Círculos

Actividad para Desarrollar Comprensión

La frase "*todos los círculos son similares*" puede parecer intuitivamente obvia, ya que todos los círculos tienen la misma forma, aunque puedan tener diferentes tamaños. Sin embargo, podemos aprender mucho sobre las propiedades de los círculos trabajando en la prueba de esta afirmación.

Recuerda que la definición de similitud requiere que encontremos una secuencia de dilataciones y transformaciones de movimiento rígidas que superpongan una figura con la otra.

Zac está describiéndole a Sione cómo demostraría que el círculo A es similar al círculo B .



Zac: "Traslada el círculo A hasta que su centro coincida con el centro del círculo B . Luego amplía el círculo A por dilatación hasta que los puntos del círculo A coincidan con los puntos del círculo B . O bien, podrías reducir el círculo B por dilatación hasta que los puntos del círculo B coincidan con los puntos del círculo A ".

Sione tiene algunas preguntas: "Después de la traslación, ¿cuál es el factor de escala para la ampliación que lleva el círculo A al círculo B ? ¿Y cuál es el factor de escala para la reducción que lleva el círculo B al círculo A ?

1. ¿Cómo responderías a las preguntas de Sione?

Basándonos en la discusión de Zac y Sione, probablemente estemos convencidos de que el círculo A y el círculo B son similares. Otra forma en que podríamos convencernos de que los dos círculos son similares sería encontrar el centro de dilatación que establece los puntos de la imagen previa del círculo A en los puntos de imagen correspondientes en el círculo B .

2. Ubica el centro de dilatación que lleva el círculo A al círculo B . Explica cómo sabes que el punto que encontraste es el centro de dilatación. (Ten en cuenta que ambos círculos se han dibujado tangentes a $\overleftrightarrow{RS}$).
3. Dibuja algunas cuerdas, triángulos u otros polígonos inscritos en cada círculo que sean similares entre sí. Explica cómo sabes que estas figuras correspondientes son similares.
4. Con base en las figuras que dibujaste en la pregunta 3, escribe algunas declaraciones de proporcionalidad que sabes son verdaderas.
5. Aquí hay una declaración de proporcionalidad que quizá no hayas considerado. ¿Qué te convence de que es verdadera?

$$\frac{\text{Circunferencia del círculo } A}{\text{Diámetro del círculo } A} = \frac{\text{Circunferencia del círculo } B}{\text{Diámetro del círculo } B}$$

Dado que esta proporción de circunferencia a diámetro es el mismo factor de escala para todos los círculos, a esta proporción se le ha dado el nombre π (pi).

6. ¿Cuánto más grande es la circunferencia del círculo B que la circunferencia del círculo A ?
7. ¿Crees que la siguiente proporción es verdadera o falsa? ¿Por qué?

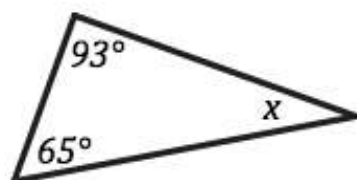
$$\frac{\text{Área de círculo } B}{\text{Área de círculo } A} = \frac{\text{Circunferencia del círculo } B}{\text{Circunferencia del círculo } A}$$

PREPARACIÓN

Tema: Encontrar los ángulos faltantes, simetría rotacional, polígonos regulares

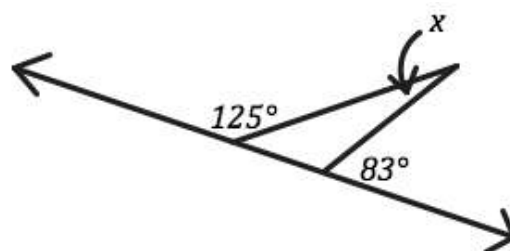
Encuentra el ángulo que falta en cada una de las figuras a continuación.

1.



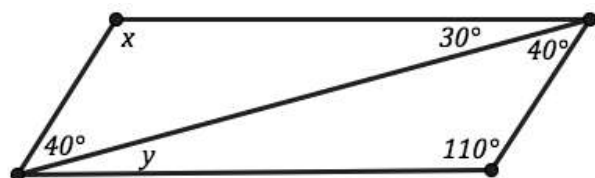
$$m\angle x =$$

2.



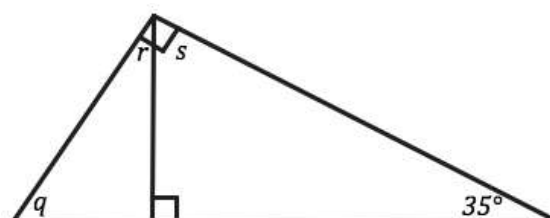
$$m\angle x =$$

3.



$$m\angle x = \quad m\angle y =$$

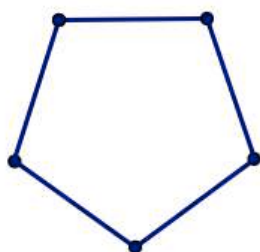
4.



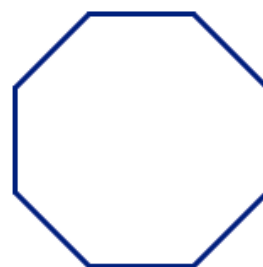
$$m\angle q = \quad m\angle r = \quad m\angle s =$$

Encuentra los ángulos de simetría rotacional para los polígonos regulares. La simetría rotacional significa que el polígono gira el número indicado de grados para colocarse sobre sí mismo y todos los puntos de la imagen coinciden con la imagen previa.

5.



6.



Need help? Visit www.rsgsupport.org

PRÁCTICA

Tema: Dilatación, proporcionalidad entre figuras similares

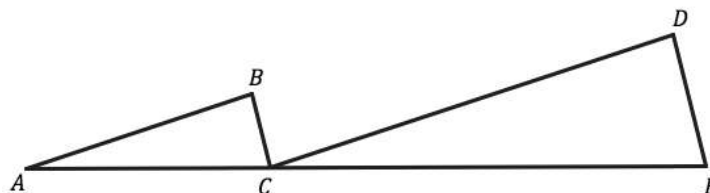
Completa las declaraciones de proporcionalidad para cada conjunto de figuras similares.

7. $\triangle ABC \sim \triangle CDE$

a. $\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{?}$

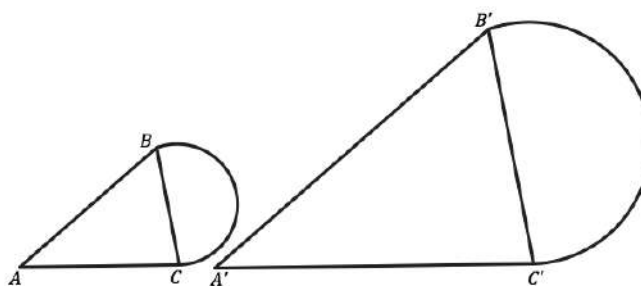
b. $\frac{AC}{AB} = \frac{?}{CD}$

c. $\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{?}$



8a. $\frac{AB}{\widehat{BC}} = \frac{?}{\widehat{B'C'}}$

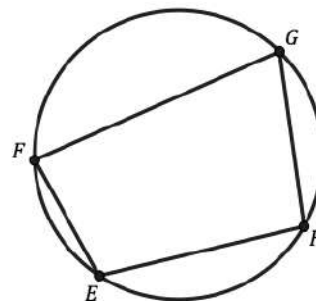
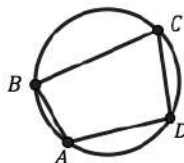
b. $\frac{\widehat{BC}}{\widehat{B'C'}} = \frac{?}{?}$



9. Cuadrilátero ABCD ~ Cuadrilátero EFGH

a. $\frac{\widehat{EF}}{?} = \frac{GH}{CD}$

b. $\frac{\text{Circunferencia del círculo grande}}{\text{Circunferencia del círculo pequeño}} = \frac{?}{?}$



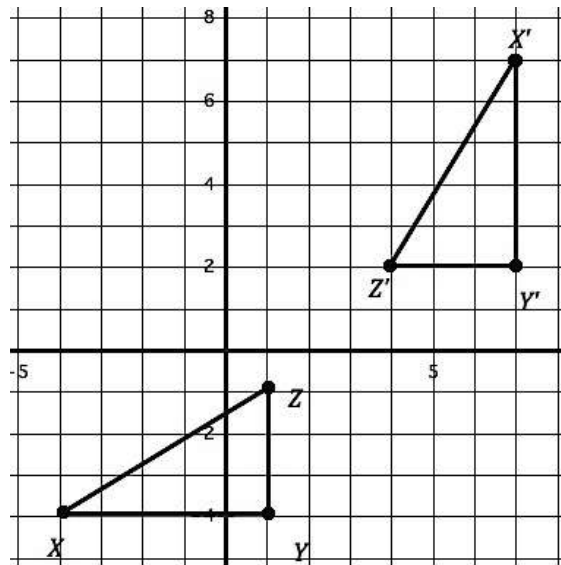
Need help? Visit www.rsgsupport.org

RENDIMIENTO

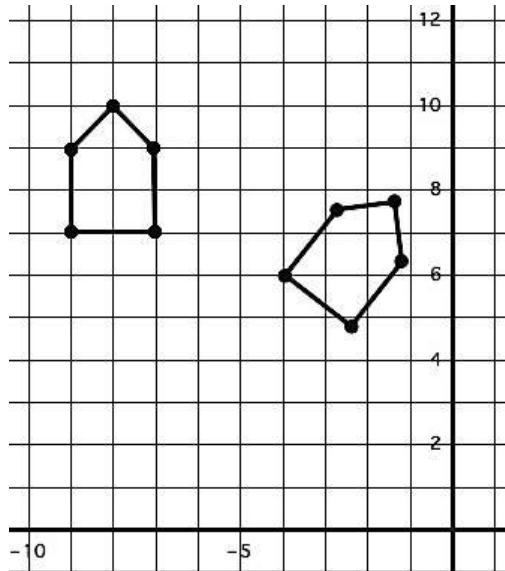
Tema: Encontrar líneas de reflexión, encontrar el centro de un círculo

Encuentra la línea de reflexión entre la imagen y la imagen previa.

10.

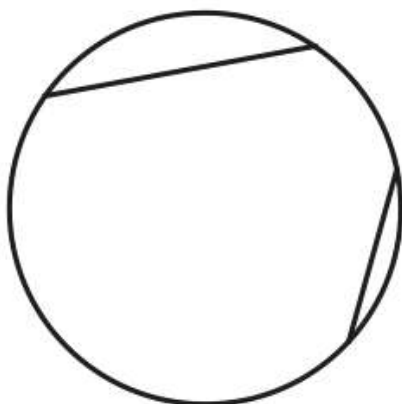


11.

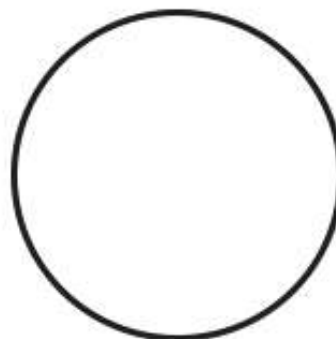


Encuentra el centro de cada círculo. (Sugerencia: las rotaciones ocurren en círculos, por lo que encontrar el centro de un círculo es como encontrar el centro de rotación entre pares de puntos en el círculo).

12. Usa las cuerdas dadas para ayudarte.



13. Dibuja dos cuerdas para ayudarte.



Need help? Visit www.rsgsupport.org



CC BY tomline43
<https://flic.kr/p/8dS9cC>

7.3 Polígonos Cíclicos

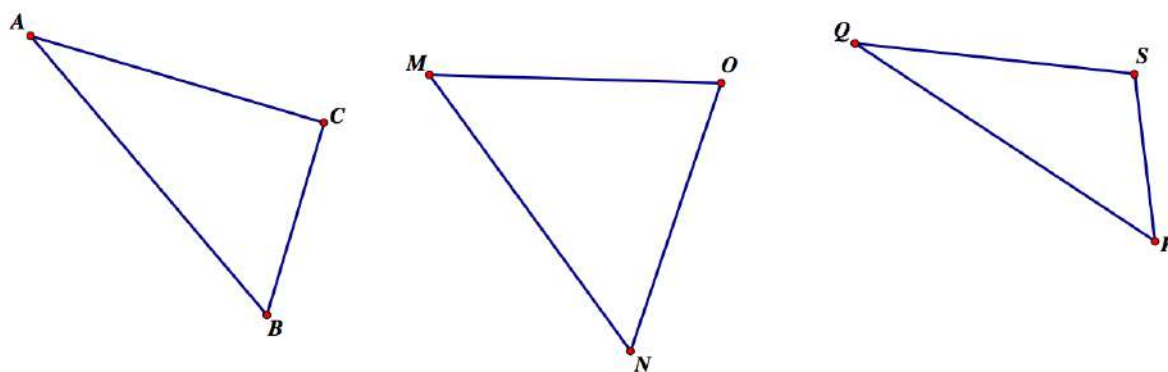
Actividad para Consolidar Comprensión

Por definición, un polígono cíclico es un \ polígono que puede inscribirse en un círculo. Es decir, todos los vértices del polígono se encuentran en el mismo círculo.

Parte 1

En la tarea 5.9 *Centros de un Triángulo*, tu trabajo sobre las notas y el diagrama de Kara debería haberte convencido de que es posible ubicar un punto que es equidistante de los tres vértices de cualquier triángulo, y, por lo tanto, todos los triángulos son *polígonos cíclicos*.

1. Basado en el trabajo de Kara, usa un compás y una regla para construir los círculos que contienen los tres vértices en cada uno de los siguientes triángulos.



Como cada vértice de un triángulo inscrito se encuentra en el círculo, cada ángulo del triángulo es un ángulo inscrito. Sabemos que la suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo es 180° y que la suma de las medidas de los tres arcos interceptados es 360° .

2. Usando uno de los diagramas de un triángulo inscrito creado anteriormente, ilustra y explica por qué esta última declaración es verdadera.

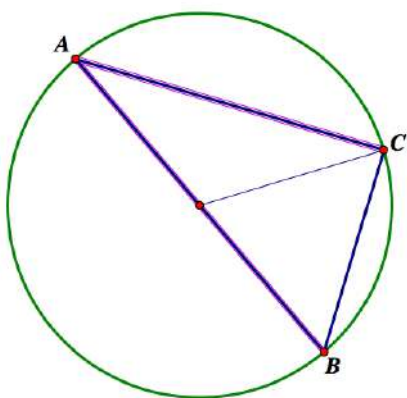
Sabemos que la medida del grado de un arco es, por definición, la misma que la medida del ángulo central formado por los radios que contienen los puntos finales del arco. Pero, ¿cómo se relaciona la medida de un ángulo inscrito que intercepta este mismo arco con la medida del ángulo central y el arco interceptado? Descubrir eso es algo útil.

3. Usando un transportador, encuentra la medida de cada arco representado en cada diagrama de círculo de arriba. Luego, encuentra la medida de cada ángulo inscrito correspondiente. Haz una conjetura basada en estos datos.

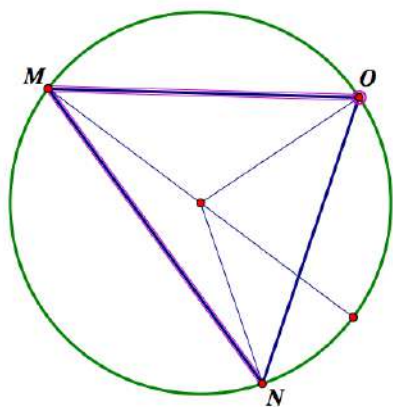
Mi conjetura sobre la medida de un ángulo inscrito:

Los tres diagramas de círculo que creaste anteriormente se han reproducido a continuación. Un ángulo inscrito ha sido marcado en negrillas en cada triángulo. También se ha agregado un diámetro del círculo a cada diagrama como un segmento de línea auxiliar, así como algunos segmentos de línea adicionales, que ayudarán a escribir pruebas sobre los ángulos inscritos. Se ilustran tres casos: caso 1, el diámetro es un lado del ángulo inscrito; caso 2, el diámetro se encuentra en el interior del ángulo inscrito; y caso 3, el diámetro se encuentra en el exterior del ángulo inscrito. En cada diagrama, demuestra tu conjetura sobre la medida de un ángulo inscrito para el ángulo inscrito que se muestra en negrillas.

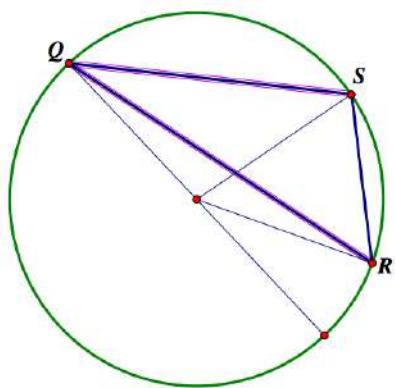
Caso 1: [Sugerencia: busca triángulos isósceles y un ángulo externo de un triángulo]



Caso 2: [Sugerencia: ¿Puedes ver el caso 1 en el caso 2?]



Caso 3:



Parte 2

Hemos aprendido que todos los triángulos son polígonos cíclicos. Ahora examinemos los posibles cuadriláteros cíclicos.

4. Utilizando el software de geometría dinámica, experimenta con diferentes tipos de cuadriláteros. Basado en tu experimentación, decide qué palabra completa mejor cada una de las siguientes declaraciones:
 - a. [Algunos, todos los, ninguno de los] cuadrados son cíclicos.
 - b. [Algunos, todos los, ninguno de los] rombos son cíclicos.
 - c. [Algunos, todos los, ninguno de los] trapezoides son cíclicos.
 - d. [Algunos, todos los, ninguno de los] rectángulos son cíclicos.
 - e. [Algunos, todos los, ninguno de los] paralelogramos son cíclicos.

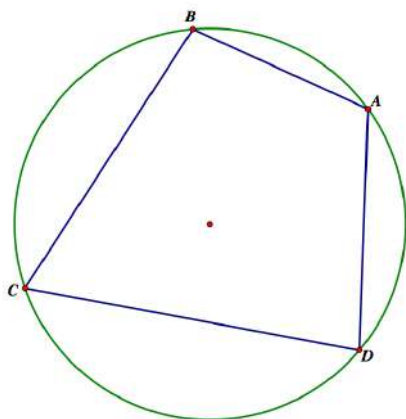
Obviamente, algunos cuadriláteros genéricos son cíclicos, ya que puedes seleccionar cuatro puntos en un círculo como los vértices de un cuadrilátero.

5. Utilizando software de geometría dinámica, experimenta con cuadriláteros cíclicos que no sean paralelogramos o trapezoides. Céntrate en las medidas de los ángulos. Haz una conjetura sobre las medidas de los ángulos de un cuadrilátero cíclico. Luego demuestra tu conjetura usando lo que sabes sobre ángulos inscritos.

Mi conjetura sobre los ángulos de un cuadrilátero cíclico:

Prueba de mi conjetura:

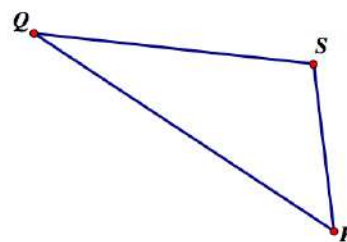
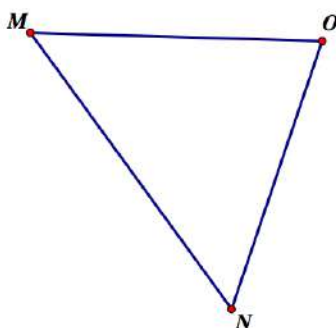
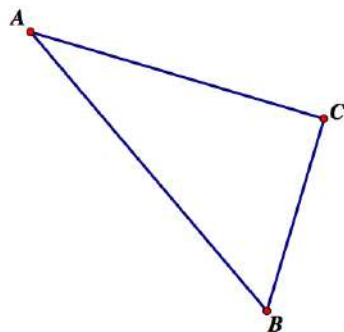
(¿Cómo podrías usar el siguiente diagrama para ayudarte en tu prueba?)



Parte 3

En la tarea 5.8 *Centros de un Triángulo*, tu trabajo sobre las notas y el diagrama de Kolton debería haberte convencido de que es posible ubicar un punto que es equidistante de los tres lados de un triángulo, y, por lo tanto, un círculo puede inscribirse dentro de cada triángulo.

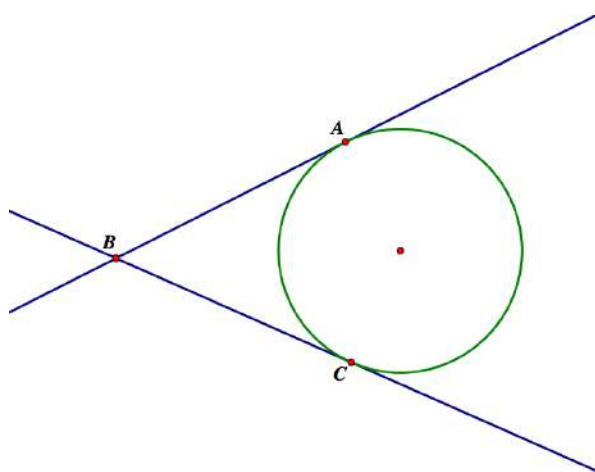
6. Basado en el trabajo de Kolton, usa un compás y una regla para construir los círculos que pueden colocarse en cada uno de los triángulos siguientes. Una vez que hayas localizado el centro del círculo inscrito, ¿cómo determinas dónde se encuentran los puntos de la tangente entre el círculo y los lados del triángulo?



7. Los ángulos formados por líneas que son tangentes a un círculo se llaman ángulos circunscritos. Utiliza el software de geometría dinámica para experimentar con las medidas de los ángulos circunscritos en relación con los arcos que interceptan. Haz una conjetura sobre las medidas de los ángulos circunscritos. Luego demuestra tu conjetura usando lo que sabes sobre ángulos inscritos.

Mi conjetura sobre las medidas de los ángulos circunscritos:

Prueba de mi conjetura:



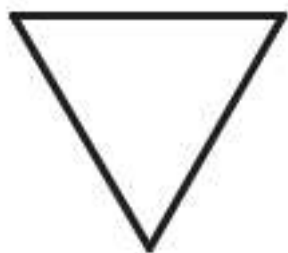
8. De acuerdo con tu trabajo en esta tarea y la tarea anterior, describe un procedimiento para construir una línea tangente a un círculo, a través de un punto dado fuera del círculo.

PREPARACIÓN

Tema: Simetría y proporciones trigonométricas

Determina los ángulos de simetría rotacional y el número de líneas de simetría reflexiva para cada uno de los polígonos siguientes.

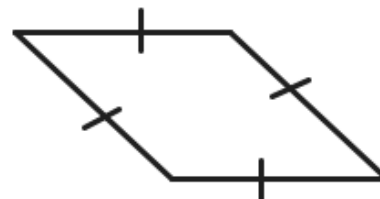
1. Triángulo equilátero



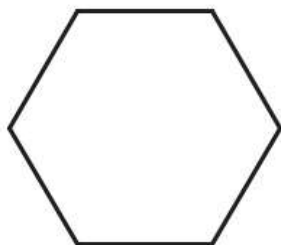
2. Rectángulo



3. Rombo



4. Hexágono regular



5. Cuadrado

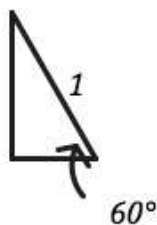


6. Decágono regular



Resuelve cada triángulo rectángulo, proporciona los ángulos y lados faltantes.

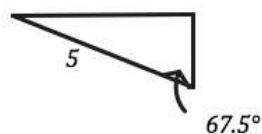
7.



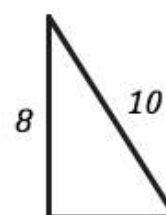
8.



9.



10.



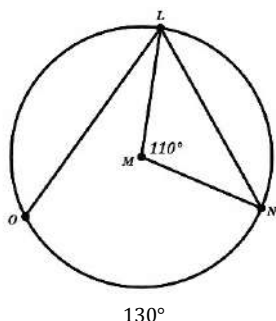
Need help? Visit www.rsgsupport.org

PRÁCTICA

Tema: Ángulos y cómo se conectan con los arcos

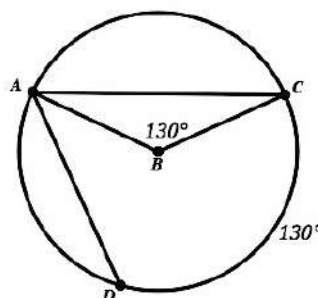
Encuentra el valor del ángulo o el arco interceptado indicado en cada figura a continuación.

11. $\odot M$ con $m\angle LMN = 110^\circ$



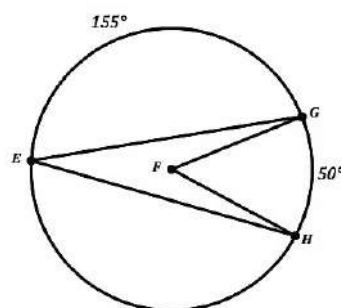
- $m\widehat{LN} =$
- $m\angle OLN =$
- $m\widehat{OL} =$

12. $\odot B$ con $m\angle ABC = 130^\circ$



- $m\widehat{AC} =$
- $m\angle CAD =$
- $m\widehat{DA} =$

13. $\odot F$

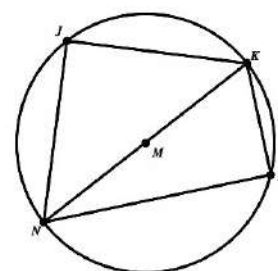


- $m\widehat{EG} =$
- $m\widehat{EHG} =$
- $m\angle GEH =$
- $m\angle GFH =$

14. $\odot M$ con diámetro $\overline{NK}$

a. $NK =$ NL=12 y KL= 5

- $m\widehat{NLK} =$
- $m\widehat{NJK} =$
- $m\angle NLK =$
- $m\widehat{KL} =$
- $m\widehat{NL} =$



15. ¿Cómo se puede usar un triángulo para mostrar la conexión entre un ángulo inscrito y la medida del ángulo del arco que intercepta? ¿Qué es verdadero acerca de las medidas de ángulo en cualquier triángulo? ¿Qué es verdadero acerca de la medida de arco para un círculo completo?

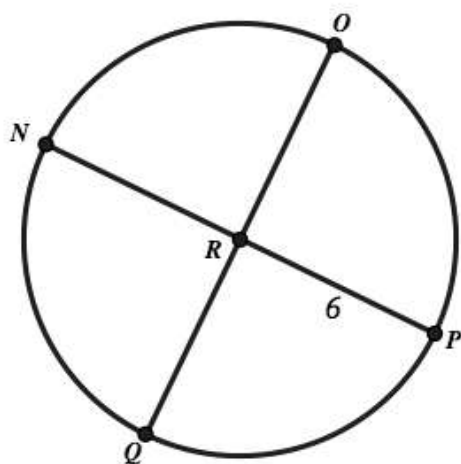
Need help? Visit www.rsgsupport.org

RENDIMIENTO

Tema: Encontrar longitudes de arcos

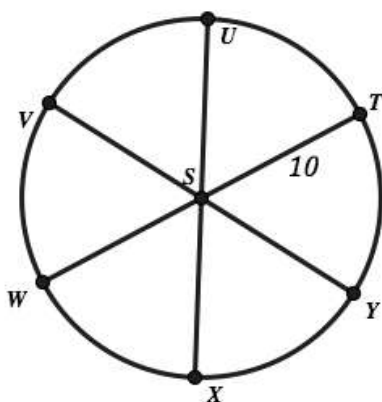
Usa lo que sabes sobre encontrar la circunferencia, $C=2\pi r$ y área, $A=\pi r^2$ de los círculos, para encontrar las distancias y áreas indicadas a continuación.

16. $\odot R$ está cortado por dos diámetros que son perpendiculares entre sí.



- Encuentra la distancia para caminar a lo largo del arco NQ
- Encuentra el área dentro de uno de los cuatro sectores
- Encuentra la distancia para caminar a lo largo de la siguiente ruta: comienza en el punto P y ve a R, luego a Q y luego a N y después regresa a P

17. $\odot S$ está cortado por tres diámetros que crean ángulos iguales en el centro del círculo.



- Encuentra la distancia para caminar a lo largo del arco UT
- Encuentra el área dentro de uno de los seis sectores
- Encuentra la distancia para caminar a lo largo de la siguiente ruta: Comienza en el punto U ve a S, luego a V, luego a W, seguido de X y de regreso a U

Need help? Visit www.rsgsupport.org

7.4 Planear el Quiosco (Gazebo)

Actividad para Desarrollar Comprensión

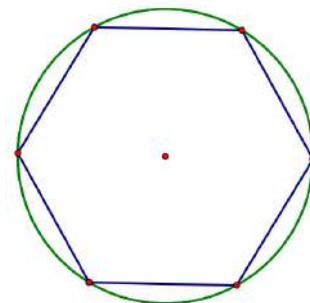


CC BY Jill Kemerer
<https://flic.kr/p/d4pyq9>

Zac está utilizando su conocimiento de la geometría para diseñar un quiosco para el patio trasero. El quiosco tendrá la forma de un polígono regular. Como parte de su diseño, Zac necesitará calcular varias cosas para que sus padres puedan comprar la cantidad adecuada de madera para la construcción. Por ejemplo, Zac necesitará calcular el perímetro del quiosco para que pueda ordenar suficiente barandilla para rodearlo; necesitará calcular el área del piso del quiosco para que pueda ordenar suficientes tablas para colocarlo; y, necesitará calcular el área de la superficie de la pirámide que forma el techo que lo cubrirá. El problema es que sus padres cambian de opinión sobre la forma en que les gustaría que fuera el quiosco: un hexágono, un octágono, un decágono, un dodecágono o incluso algún otro tipo de n -gono.

De tu trabajo en Matemáticas I con *Simetrías de Polígonos Regulares*, Zac sabe que todos los polígonos regulares son cíclicos, es decir, cada polígono regular puede **inscribirse** en un círculo. Zac se pregunta si puede usar esta propiedad de polígonos regulares para ayudarlo a encontrar su perímetro y área.

Para su primer intento de crear un dibujo a escala del quiosco, Zac ha inscrito un hexágono regular dentro de un círculo con un radio de 2 pulgadas. Él se pregunta si esta es suficiente información para encontrar el perímetro de este hexágono y el área que encierra.

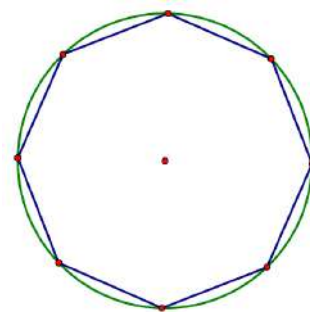


1. Para comenzar con la tarea de encontrar el perímetro de este hexágono, Zac decide escribir lo que ya sabe sobre esta figura. Decide si estás de acuerdo o en desacuerdo con cada una de sus declaraciones y explica por qué. Quizá quieras agregar características al diagrama para ilustrar los comentarios de Zac.

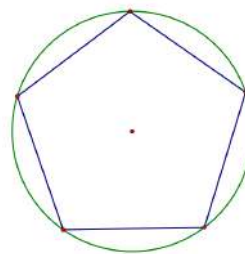
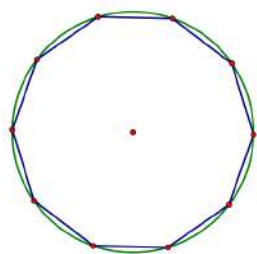
Lo que Zac cree que sabe:	¿Estás de acuerdo o en desacuerdo? Explicar por qué.
Dos radios dibujados a dos vértices consecutivos del hexágono regular forman un ángulo central, cuya medida se puede encontrar en función de la simetría rotacional de la figura.	
El hexágono se puede descomponer en 6 triángulos isósceles congruentes.	
La longitud de las altitudes de cada uno de estos 6 triángulos congruentes (la altitud dibujada del vértice del triángulo que se encuentra en el centro del círculo) se puede encontrar usando la trigonometría.	
La longitud de los lados del triángulo que forman las cuerdas del círculo se puede encontrar utilizando la trigonometría.	

- De acuerdo con lo que tu y Zac saben, busca el perímetro del hexágono que inscribió en el círculo con un radio de 2 pulgadas. Ilustra y describe tu estrategia para que alguien más pueda seguirla.
- Ahora encuentra el área del hexágono que Zac inscribió en el círculo con un radio de 2 pulgadas. Ilustra y describe tu estrategia para que alguien más pueda seguirla.

4. ¿Qué pasaría si Zac hubiera inscrito un octágono dentro del círculo del radio de 2 pulgadas en lugar de un hexágono? Modifica tu estrategia para encontrar el perímetro y el área del octágono.



5. Modifica tu estrategia para encontrar el perímetro y el área de cualquier n -gono regular inscrito en un círculo de cualquier radio dado.



PREPARACIÓN

Tema: Radio y área o circunferencia

Dada el área, circunferencia o radio, encuentra los otros dos.

1.

Radio = 1 m
Área =
Circunferencia =

2.

Radio =
Área = $9\pi \text{ ft}^2$
Circunferencia =

3.

Radio =
Área =
Circunferencia = 8π yardas

4.

R =
A = 3.14 m^2
C =

5.

R = 7 millas
A =
C =

6.

R =
A =
C = 81π pulgadas

PRÁCTICA

Tema: Encontrar el área y el perímetro de polígonos regulares

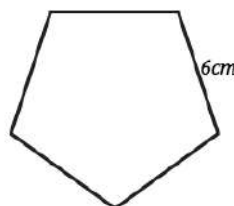
Para cada uno de los polígonos regulares, encuentra la medida del ángulo interior, el perímetro y el área.

7.



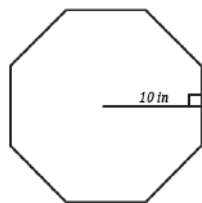
- Medida de un ángulo interior:
- Perímetro:
- Área:

8.



- Medida de un ángulo interior:
- Perímetro:
- Área:

9.



- Medida de un ángulo interior:
- Perímetro:
- Área:

10. Un polígono regular con 14 lados. Y un lado igual a 6 pulgadas.

- Medida de un ángulo interior:
- Perímetro:
- Área:

Need help? Visit www.rsgsupport.org

11. Un 24-gono con lados iguales a 12 metros.

- Medida de un ángulo interior:
- Perímetro:
- Área:

12. Un nonágono con lados iguales a 8 yardas.

- Medida de un ángulo interior:
- Perímetro:
- Área:

RENDIMIENTO

Tema: Encontrar el área de un sector de un círculo

Si un círculo se corta en cuatro piezas iguales, entonces el área de una pieza claramente sería una cuarta parte del área de todo el círculo. Si un círculo se corta en seis piezas iguales, entonces el área de una de las piezas sería un sexto del área total y así sucesivamente, para n piezas iguales el área de una pieza sería una n ésima parte del área total. Con esto en mente, considere el área de un sector que tiene un grado de tamaño. Un círculo dividido en sectores que son todos de un grado en tamaño tendría 360 sectores. ¿Cómo podrías encontrar el área de solo uno de ellos?

Una vez que tengas uno de ellos, puedes multiplicarlo por cualquier cantidad para encontrar un sector de cualquier cantidad de grados. Usa esta estrategia para buscar el área del sector de cada círculo en la página siguiente. Usa el ejemplo a continuación para ayudarte.

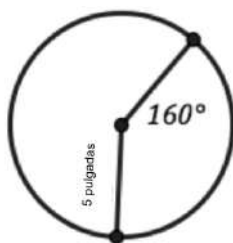
El área del círculo es 9π pulgadas²

Entonces, un sector de un grado tendría área $\frac{9\pi}{360}$ pulgadas²

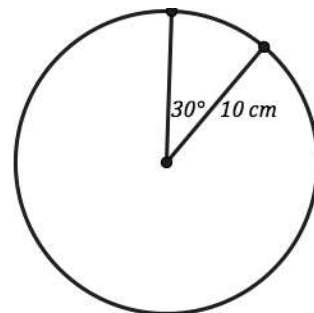
y entonces, el área del sector con un ángulo central de 80° sería $(80) \frac{9\pi}{360}$ que simplificado sería 2π pulgadas².

Encuentra el área del sector indicada con la medida del ángulo.

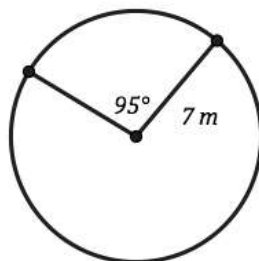
13.



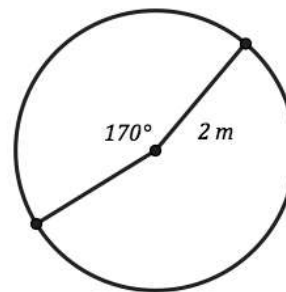
14.



15.



16.



Need help? Visit www.rsgsupport.org



CC BY Saulo Pratti
<https://flic.kr/p/6LK2k9>

7.5 De Polígonos a Círculos

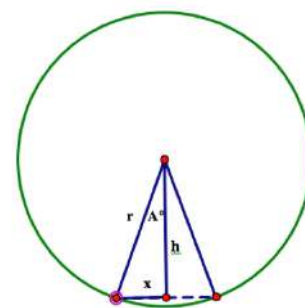
Actividad para Consolidar Comprensión

Parte 1: De perímetro a la circunferencia

En la tarea anterior, Planear el Quiosco, desarrollaste una estrategia para encontrar el perímetro de un polígono regular con n lados inscritos en un círculo de radio r . La estrategia de Tehani consiste en la siguiente fórmula:

$$P = 2n \cdot r \sin\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)$$

Tehani dibujó este diagrama como parte de su trabajo mientras desarrollaba esta fórmula.



- Usando el diagrama de Tehani, explica en detalle cómo obtuvo su fórmula.
- Dado que n es lo único que varía en esta fórmula, Travis sugiere que Tehani podría reescribir su fórmula en la forma $P = 2r\left[n \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)\right]$. Debido a que el perímetro de un n -gono se aproxima la circunferencia de un círculo cuando n es una gran cantidad de lados, Travis sugiere que examinen qué le sucede a $n \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)$ la porción de la fórmula de Tehani a medida que n se hace cada vez más grande. Usa una calculadora u hoja de cálculo para completar la siguiente tabla y ver qué sucede.

n	$n \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)$
6	
12	
24	
48	
96	
100	
1,000	
10,000	

3. Escribe una fórmula para la circunferencia de un círculo basada en la fórmula de Tehani para el perímetro de un n -gono regular inscrito y lo que has observado al generar esta tabla.

Parte 2: Del área de un polígono al área de un círculo

Enfoque #1

La fórmula de Tehani para el área de un polígono regular con n lados inscritos en un círculo de radio r es:

$$A = n \cdot r \sin\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) \cdot r \cos\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)$$

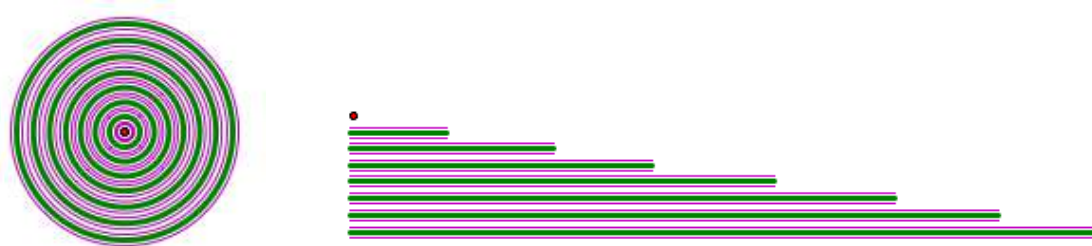
4. Explica en detalle cómo Tehani obtuvo esta fórmula. Puedes consultar el diagrama de arriba.
5. Travis sugiere que podrían reescribir la fórmula de Tehani en la forma $A = r^2 \cdot \left[n \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) \cdot \cos\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) \right]$ y luego examina qué pasa con la última parte de la fórmula a medida que n se hace cada vez más grande. Usa una calculadora u hoja de cálculo para completar la siguiente tabla y ve qué sucede.

n	$n \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) \cdot \cos\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)$
6	
12	
24	
48	
96	
100	
1,000	
10,000	

6. 6. Escribe una fórmula para el área de un círculo basada en la fórmula de Tehani para el área de un n -gono regular inscrito y lo que has observado al generar esta tabla.

Enfoque #2

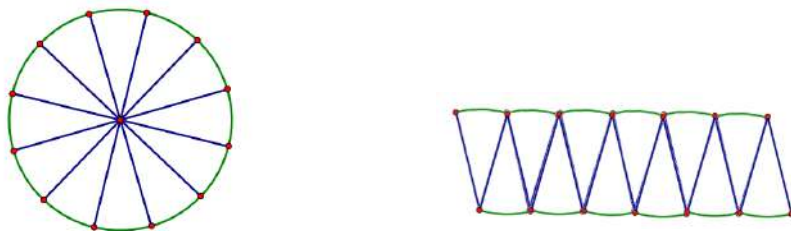
Un círculo se puede descomponer en un conjunto de anillos finos y concéntricos, como se muestra a la izquierda en el siguiente diagrama. Si desenrollamos y apilamos estos anillos podemos aproximarnos a un triángulo como se muestra en la figura de la derecha.



7. ¿Cómo podríamos describir la altura de este "triángulo" en relación con el círculo?
8. ¿Cómo podríamos describir la longitud de la base de este "triángulo" en relación con el círculo?
9. A medida que los anillos se vuelven cada vez más estrechos, la forma triangular se acerca cada vez más a un triángulo exacto con la misma área que el círculo. ¿Qué sugiere este diagrama para la fórmula del área de un círculo?

Enfoque #3

Un círculo se puede descomponer en un conjunto de sectores congruentes, como se muestra a la izquierda en el siguiente diagrama. Podemos reorganizar estos sectores para aproximarlos a un paralelogramo como se muestra en la figura de la derecha.

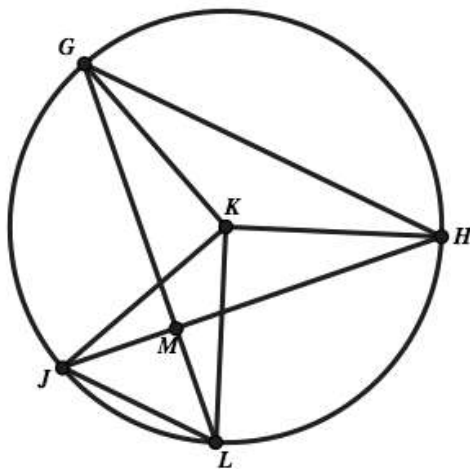


10. ¿Cómo podríamos describir la altura del "paralelogramo" relativo al círculo?
11. ¿Cómo podríamos describir la base de este "paralelogramo" relativo al círculo?
12. A medida que descomponemos el círculo en más y más sectores, la forma del "paralelogramo" se acerca cada vez más a un paralelogramo exacto con la misma área que el círculo. ¿Qué sugiere este diagrama para la fórmula del área de un círculo?

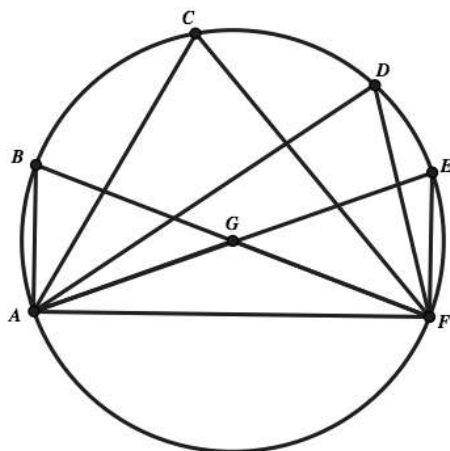
PREPARACIÓN

Tema: ángulos y arcos de círculos, proporciones con figuras similares

Encuentra los valores indicados dado el diagrama y las medidas proporcionadas a continuación.



1. Dado que $m\angle LGH$ y $m\angle GHJ$ son ambos 45°
¿Qué otra medida de ángulos o arcos conoces? Listarlos a continuación (trata de encontrar seis).
2. Dado que $\triangle GKH$ tiene dos lados que son radios del círculo.
¿Qué tipo de triángulo es $\triangle GKH$?
¿Hay otros triángulos de este tipo en el diagrama? Si es así, nómbralos.
3. Dado que el $m\widehat{GH}$ es 113.2°
¿Cuál es el $m\widehat{JL}$? (Mira los problemas 1 y 2).



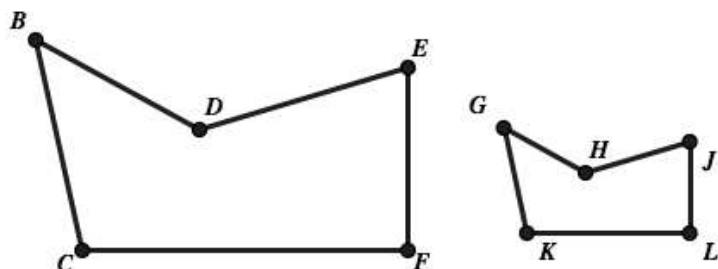
4. Dado $\odot G$, ¿qué ángulos tendrían la misma medida?
Enumera todos a continuación, y di cómo sabes que son iguales.
5. Hay varios triángulos en el círculo. Enumera los triángulos que están inscritos en triángulos.

Además, enumera otros triángulos y clasifica tantos triángulos como puedas.
6. Dado que $m\angle GFE = 70^\circ$ encuentra todo ángulo posible y las medidas de arco.

Need help? Visit www.rsgsupport.org

Dadas las formas similares a continuación, proporciona los lados o las proporciones que hacen faltan.

7.



a. $\frac{BD}{BC} = \frac{?}{?}$

Completa la proporción e indica cómo sabes que es correcta.

b. $\frac{JL}{EF} = \frac{KL}{?}$

Completa la proporción e indica cómo sabes que es correcta.

c. Si es posible, completa las proporciones faltantes para que sean declaraciones verdaderas. Si no es posible, di por qué no.

i) $\frac{DE}{HJ} = \frac{?}{?}$

ii) $\frac{CF}{KL} = \frac{?}{?}$

iii) $\frac{GH}{?} = \frac{BD}{?}$

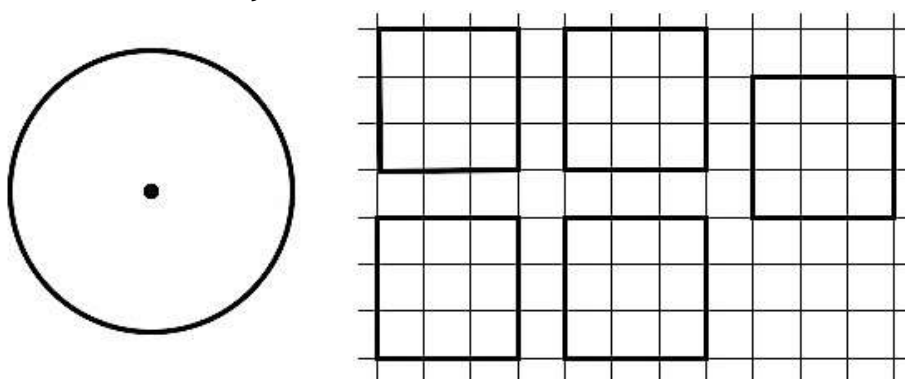
iv) $\frac{BC}{?} = \frac{GK}{?}$

v) $\frac{HJ}{?} = \frac{?}{BC}$

PRÁCTICA

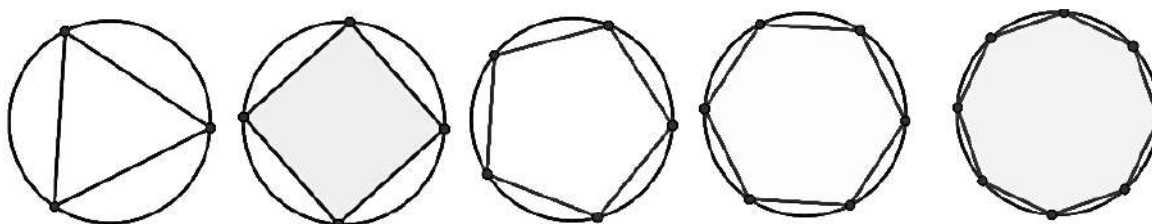
Tema: Conexión de polígonos con círculos

8. Debajo se te da un círculo y también varios cuadrados que están contruidos de modo que sus lados son iguales al radio del círculo. Usa estos cuadrados y círculos para calcular cuántos cuadrados se necesitan para rellenar el área del círculo. Declara lo que notas. (Te invitamos a usar papel de calcar o crear recortes).



Need help? Visit www.rsgsupport.org

9. ¿Cuál de los siguientes polígonos tendría un área y perímetro más cercano al círculo en el que está inscrito? ¿Por qué?



10. Dado que el radio de los círculos en **el problema anterior** es de 10 pies. Busca el área de cada uno de los polígonos regulares y anótalos en la tabla siguiente junto con la medida de un ángulo para cada polígono y la longitud lateral de cada polígono. (Un par ya está resuelto).

Figura	Un ángulo interior	Longitud lateral	Área de la figura
Triángulo	60°		
Cuadrado		$10\sqrt{2} = 14.14$	
Pentágono			
Hexágono			
Octágono			
Círculo			

11. Muestra y explica cómo un círculo se puede cortar en sectores y reconfigurar para que luzca lo más parecido a un polígono que podría tener su área calculada usando una fórmula estándar.
12. Muestra y explica cómo se puede dividir un círculo en varios anillos o círculos interiores que pueden reagruparse para que luzca lo más parecido a un polígono que podría tener su área calculada usando una fórmula estándar.

Need help? Visit www.rsgsupport.org

RENDIMIENTO

Tema: Encontrar la longitud del arco como una distancia

Del mismo modo que un círculo se puede dividir en 360 sectores como un medio para encontrar el área de cualquier tamaño de sector. De manera similar, la circunferencia de un círculo se puede dividir en 360 piezas equivalentes como medio para encontrar la distancia realmente recorrida a lo largo de cualquier arco del círculo.

La circunferencia del círculo es 6π pulgadas.

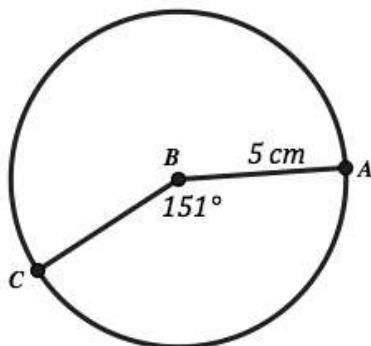
Entonces, un sector de un grado tendría una longitud de $\frac{6\pi}{360}$ pulgadas.

Y así el área del sector con un ángulo central de 80°

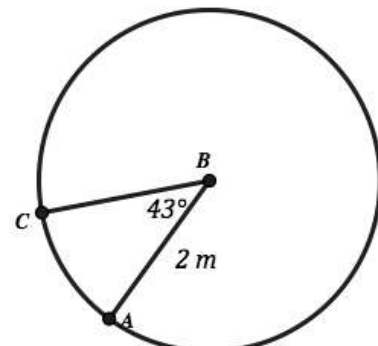
sería $(80) \frac{6\pi}{360}$ que simplificado es $\frac{4\pi}{3}$ pulgadas o aproximadamente 4.19 pulgadas.

Mira detenidamente el ejemplo en la página anterior y luego usa esta estrategia para encontrar la longitud del arco (distancia real recorrida a lo largo del camino del arco) en cada uno de los problemas que se proporcionan a continuación.

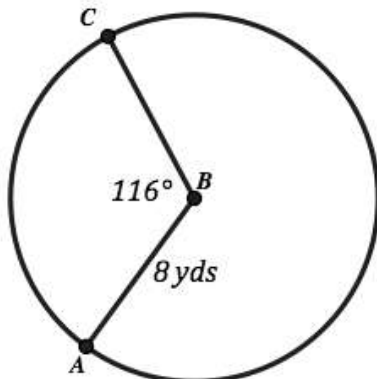
13.



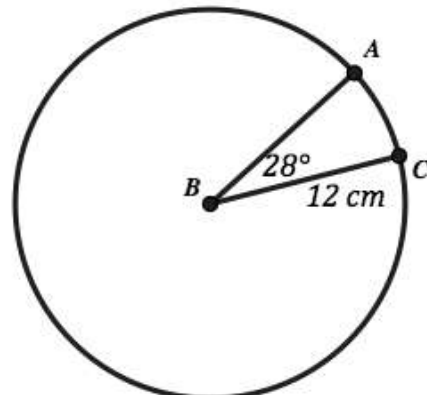
14.



15.



16.



Need help? Visit www.rsgsupport.org



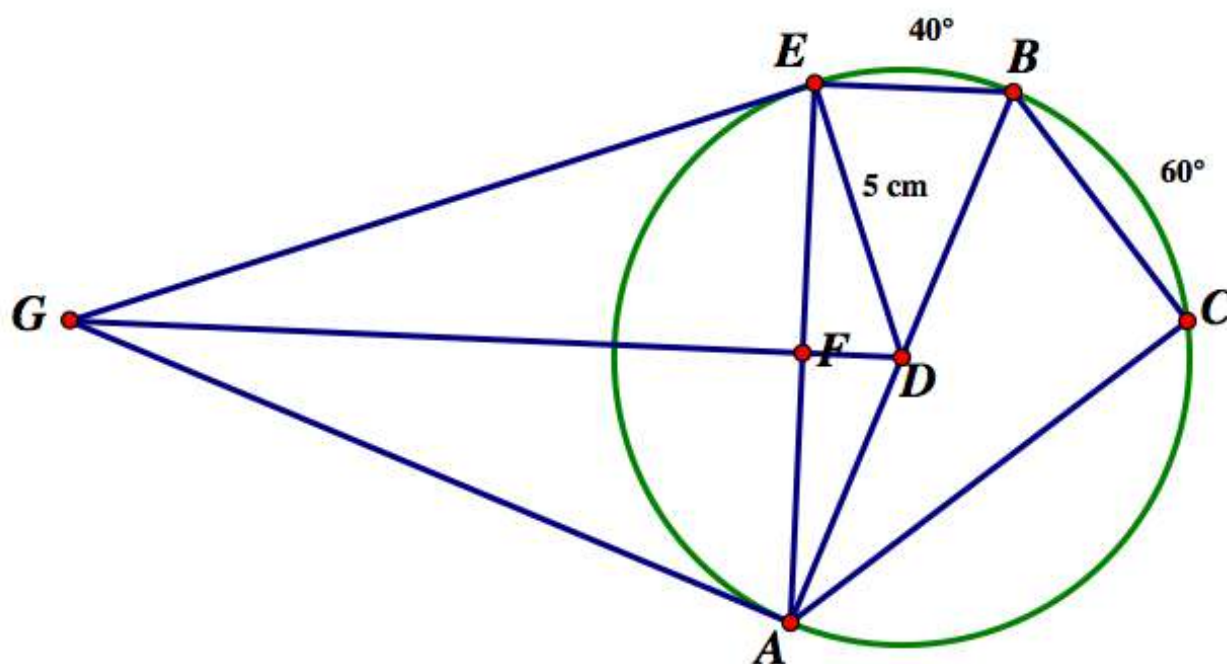
CC BY Marylang GovPics
<https://flic.kr/p/nr9W43>

7.6 Razonamiento Circular

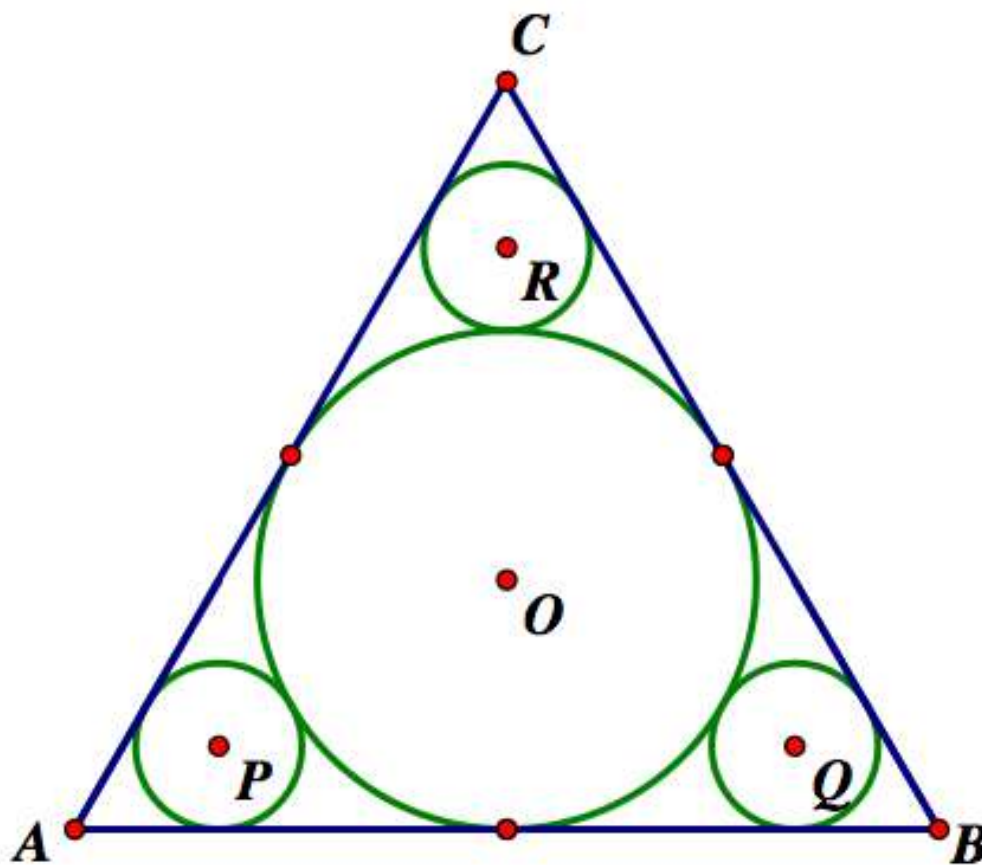
Actividad para Practicar Comprensión

Los siguientes problemas se basarán en tu conocimiento de similitud, relaciones de círculos y trigonometría.

- En el siguiente diagrama, el radio de $\odot D$ es 5 cm y F es el punto medio de $\overline{AE}$. Los segmentos $\overline{GE}$ y $\overline{GA}$ son tangentes a $\odot D$. Las medidas del arco EB y arco BC se dan en el diagrama. Encuentra las medidas de todos los demás ángulos, arcos y segmentos sin marcar.



2. En el diagrama a continuación, $\triangle ABC$ es equilátero. Todos los círculos son tangentes entre sí y a los lados del triángulo equilátero. El radio de los tres círculos más pequeños $\odot P$, $\odot Q$ y $\odot R$, es 4 cm. El radio de $\odot O$ no se da.
- Encuentra el radio de $\odot O$ y la longitud de los lados del triángulo equilátero.



PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO	Nombre	Periodo	Fecha
------------------------------------	--------	---------	-------

PREPARACIÓN

Tema: Conversión y escala de medición

Muchas veces, los artículos que estamos interesados en medir o mantener un registro de alguna manera, están en una unidad de medida que necesitamos cambiar.

A continuación, encontrarás varias medidas, conviértelas a unidades en pies.

(1 pie = 12 pulgadas, 1 yarda = 3 pies, 1 milla = 5280 pies)

- | | | |
|----------------|---------------|-----------------|
| 1. 50 pulgadas | 2. 2.5 yardas | 3. 133 pulgadas |
| 4. 7 yardas | 5. 2 millas | 6. 8 pulgadas |

La ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ convertirá las temperaturas medidas en Fahrenheit a la unidad de medida Celsius.

Usa esta ecuación para convertir las temperaturas dadas.

- | | | |
|----------|----------|----------|
| 7. 50°F | 8. 98°F | 9. 32°F |
| 10. 20°C | 11. 85°C | 12. 42°C |

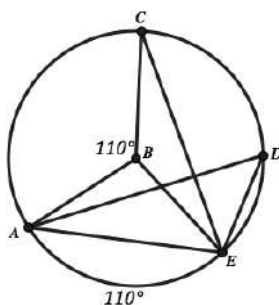
PRÁCTICA

Tema: Longitud del arco, medida del arco, ángulos central e inscrito

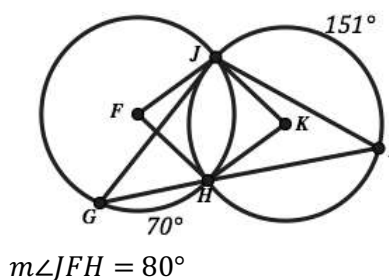
Use la figura a continuación y los datos, para encontrar todas las medidas del ángulo y del arco posibles.

Need help? Visit www.rsgsupport.org

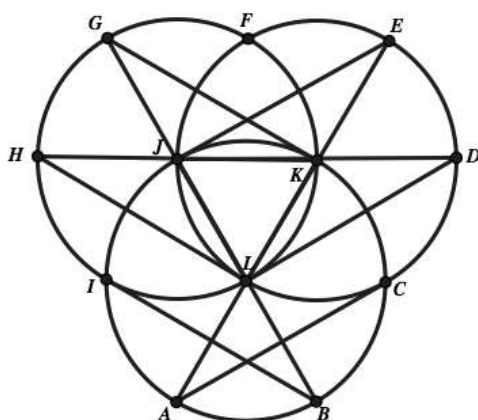
13.



14. $\odot F \cong \odot K$ y $\angle JFH \cong \angle JKH$



15. En la figura a continuación, $\triangle JKL$ es un triángulo equilátero. Enumera todas las medidas de ángulo y arco que seguramente sabrás como resultado de este dato proporcionado.



16. En la figura de arriba. Dado que $\triangle JKL$ es un triángulo equilátero y cada lado tiene 5 unidades de longitud, enumera todas las medidas de segmento y longitud de arco que seguramente sabrás como resultado de esta información proporcionada.

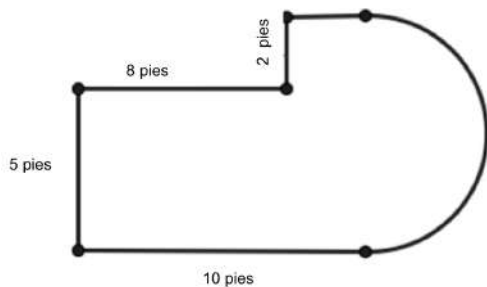
Need help? Visit www.rsgsupport.org

RENDIMIENTO

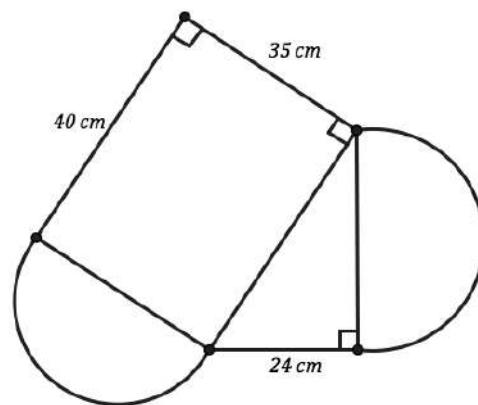
Tema: Área y distancia para figuras compuestas

Encuentra el área y el perímetro para cada una de las siguientes figuras.

17.



18.



Need help? Visit www.rsgsupport.org

7.7 π (PIED)

Actividad para Desarrollar Comprensión

Los estudiantes han planeado varias actividades para celebrar el Día Pi en su escuela. Además de los concursos de comer *pie* y lanzar un *pie* a la cara de sus maestros favoritos, el Club de Matemáticas planea ganar dinero vendiendo rebanadas de *pie* durante la hora del almuerzo. Cada miembro del club ha contribuido con un par de *pies* caseros para la venta. Desafortunadamente, los miembros del club eligieron una variedad de tamaños y formas de moldes para hornear sus pasteles. Algunos estudiantes usaron moldes redondos de 9 pulgadas para sus *pies*, otros usaron moldes redondos de 8 pulgadas, algunos usaron moldes cuadrados de 8 por 8 pulgadas, y un estudiante usó un molde de 9 por 13 pulgadas. Ahora los miembros del club tienen el dilema de cómo cortar los *pies*, para que cada porción sea aproximadamente la misma cantidad, ya que planean cobrar la misma cantidad por cada rebanada, independientemente del molde que provenga.

Después de mucho debate, los miembros del club han decidido cortar los *pies* redondos de 8 pulgadas en 5 rebanadas iguales (o sectores como los *geeks* matemáticos los llaman), los *pies* redondos de 9 pulgadas en 6 rebanadas iguales, los de 8 pulgadas por 8 pulgadas en rectángulos de 2 por 4 pulgadas, y el *pie* de 9 por 13 pulgadas en rectángulos de 3 por 3 $\frac{1}{4}$ pulgadas.

Aunque las piezas parecen del mismo tamaño, algunos estudiantes piensan que podría haber una ventaja de precio al comprar un tipo de porción sobre otra.

1. ¿Qué porción de pastel es la más grande y cuál es la más pequeña? ¿Cómo decidiste?

Desafortunadamente, no todos en el club de matemáticas son buenos en calcular al cortar los sectores de igual tamaño de los *pies* redondos. Por lo tanto, a uno de los estudiantes se le asigna el cargo de "control de calidad".



CC Seth Lemons

<https://flic.kr/p/772j87q>

Le dan un transportador y le dicen que rechace cualquier rebanada de *pie* que difiera más o menos 4° de la medición de ángulo exacto. Usando este criterio, ¿cuál es la cantidad más pequeña y más grande de *pie* que puedes obtener en una rebanada de *pie* sacada del molde de 8 pulgadas?

2. Usando este criterio, ¿cuál es la cantidad más pequeña y más grande de *pie* que puedes obtener en una rebanada de *pie* sacada del molde de 9 pulgadas?

El estudiante a cargo de control de calidad se da cuenta que es muy difícil medir el ángulo de un sector de *pie* en grados, y sugiere que corten un trozo de hilo que podría usarse para medir alrededor del borde exterior del *pie* para permitir que los servidores sepan dónde hacer el próximo corte.

4. ¿Qué tan largo debe ser este hilo para medir el arco de una rebanada de *pie* para los *pies* redondos de 8 pulgadas?
5. ¿Qué tan largo debe ser este hilo para medir el arco de una rebanada de *pie* para los *pies* redondos de 9 pulgadas?

A Wendell realmente le gusta el *pie* y se ha ofrecido a pagar el doble del precio de una rebanada de *pie* que garantice que contiene al menos 15 pulgadas cuadradas de *pie*.

6. ¿Cuántos grados mide el sector más pequeño del *pie* redondo de 8 pulgadas que satisfará el antojo de Wendell?

7. ¿Qué tan largo debe ser el hilo para medir el arco exterior de este sector?

8. ¿Cuántos grados mide el sector más pequeño del *pie* redondo de 9 pulgadas que satisfará el antojo de Wendell?

9. ¿Qué tan largo debe ser el hilo para medir el arco exterior de este sector?

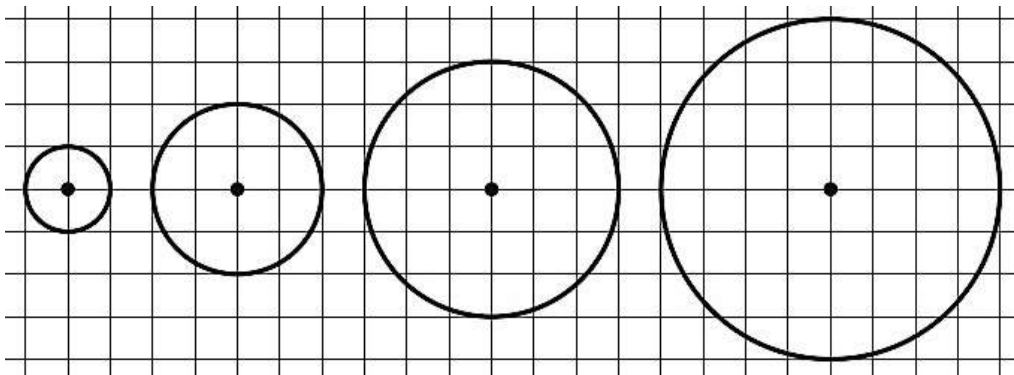
10. Un sector del *pie* redondo de 9 pulgadas mide n° . ¿Cuál es su área? ¿Cuál es la longitud de su arco?

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO	Nombre	Periodo	Fecha
------------------------------------	--------	---------	-------

PREPARACIÓN

Tema: Circunferencia, proporciones

1. Hay cuatro círculos al calce, de cada uno con un radio diferente. Determina la circunferencia y el área de cada uno y busque cualquier patrón. ¿Que notaste?



	Radio = 1	Radio = 2	Radio = 3	Radio = 4
Circunferencia				
Área				

Una proporción es una comparación entre dos cantidades. Las relaciones trigonométricas de seno, coseno y tangente son proporciones entre los lados en un triángulo rectángulo. Podemos hacer relaciones entre muchas cantidades diferentes.

Escribe proporciones para las cantidades indicadas a continuación.

2. La proporción de niños y niñas en nuestra clase de matemáticas.
3. La proporción de niñas a niños en su familia.

Need help? Visit www.rsgsupport.org

4. La relación baños a dormitorios en su casa.
5. La proporción de televisores a personas que viven en su casa.
6. La proporción de personas en su casa a teléfonos celulares en su casa.

PRÁCTICA

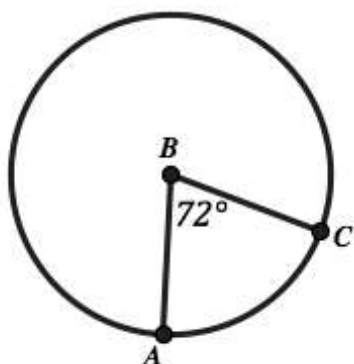
Tema: Circunferencia y área de círculos y sectores de círculos

Usa la información dada para determinar el artículo deseado.

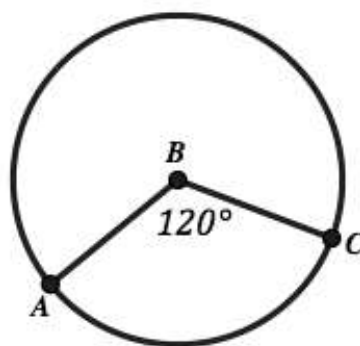
7. El área del círculo es $25\pi \text{ cm}^2$.
¿Cuál es la circunferencia del círculo?

8. La circunferencia del círculo es 10π pies.
¿Cuál es el área del círculo?

9. El área del sector pequeño es 20π pies².
¿Cuál es el radio del círculo?

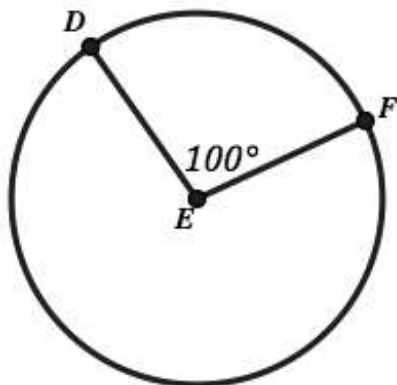


10. La longitud del arco AC mide 16π cm.
¿Cuál es el área del círculo?

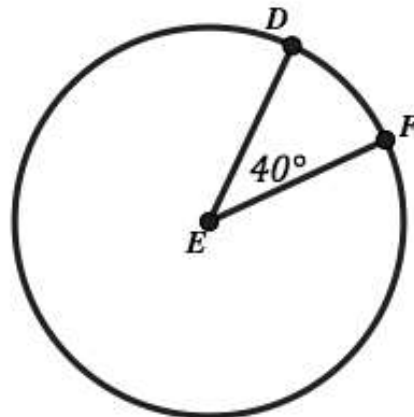


Need help? Visit www.rsgsupport.org

11. La longitud del arco DF mide 30 m
¿Cuál es el área del círculo?



12. El área del sector pequeño es π pulgadas².
¿Cuál es la circunferencia del círculo?

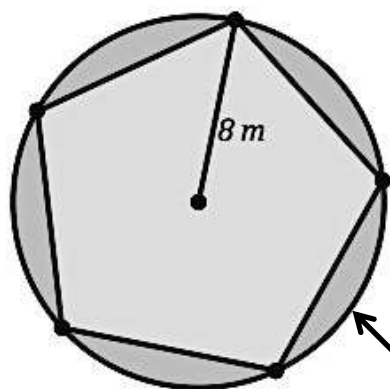


RENDIMIENTO

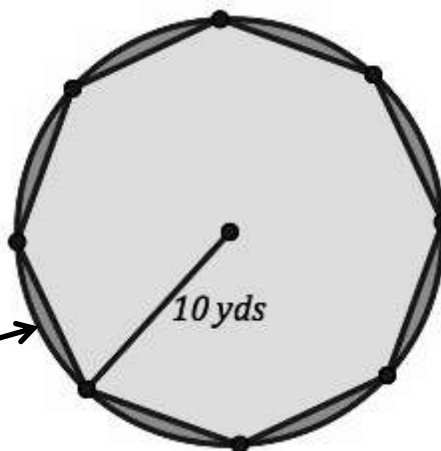
Tema: Encontrar área y descomposición de área

Encuentra el área de la región sombreada más oscura en cada figura a continuación.

13.



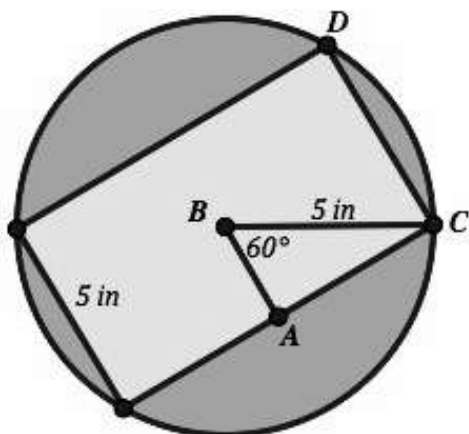
14.



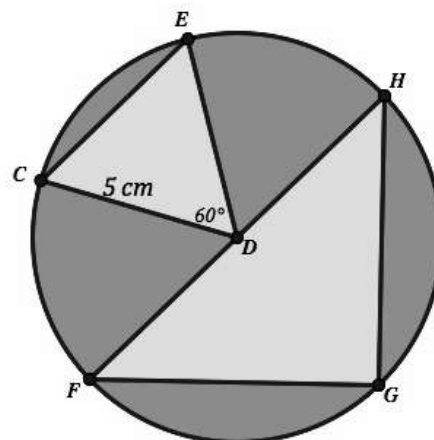
Más oscura

Need help? Visit www.rsgsupport.org

15.



16.



Need help? Visit www.rsgsupport.org

7.8 El Jardín Redondo de Madison

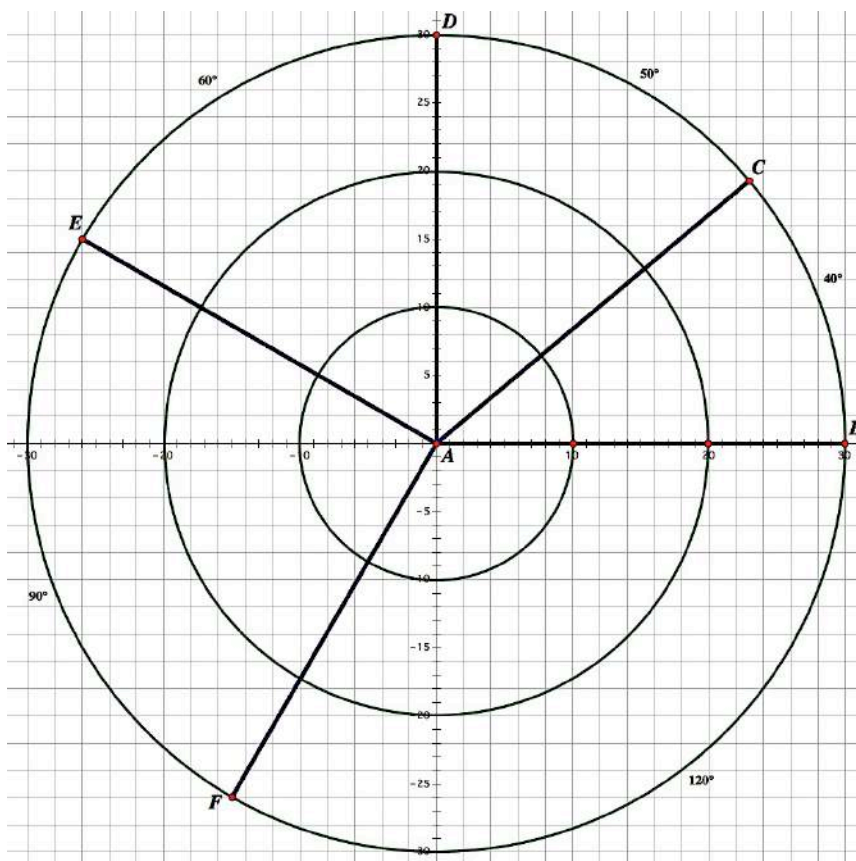
Actividad para Practicar y Desarrollar Comprensión



CC BY Karen Blakeman
<https://flic.kr/p/bABiLG>

El año pasado, Madison ganó el premio "Jardín más Destacado" de la ciudad, por su jardín cuadrado. Este año planea superar eso con su diseño de un hermoso jardín redondo.

Los adoquines crearán tanto caminos circulares como caminos que parecen rayos de rueda entre las flores. El diseño de Madison comienza con un rociador en el centro y anillos concéntricos de coloridas flores que rodean el rociador central. El rociador se puede ajustar de manera que riegue solo el círculo interior de las flores, o se puede ajustar para que riegue todo el jardín redondo, de manera que las flores que necesitan ser regadas con mayor frecuencia se colocarán cerca del centro del jardín, y las que necesiten la menor cantidad de agua se colocarán más alejadas del centro. Los sectores del jardín no serán todos del mismo tamaño, ya que se necesita acomodar diferentes tipos de plantas.



Aquí está el diseño de Madison para su jardín. La cantidad de grados en cada sector ha sido marcado.

1. Madison solo ha marcado la medida del grado en los arcos del anillo más externo del jardín. Determina la medida del ángulo para los arcos en los anillos interior y medio del jardín.
2. Madison necesita pedir adoquines para el jardín. Ella planea variar el tamaño y los colores de los adoquines en diferentes partes del jardín. Así que ella necesita saber las longitudes de diferentes porciones de los caminos. Ayúdala a completar esta tabla calculando las longitudes de los arcos faltantes.

	Distancia del centro	Longitud del Arco				
		Sector de 40°	Sector de 50°	Sector de 60°	Sector de 90°	Sector de 120°
Círculo interno de adoquines	10 pies					
Círculo medio de adoquines	20 pies					
Círculo externo de adoquines	30 pies					

3. Cuando Madison llenó la tabla, comenzó a notar algunas cosas interesantes. ¿Qué notaste tú?
4. Una cosa que Madison notó involucraba la proporción entre la longitud del arco y el radio del círculo. Completa esta versión de la tabla y di qué crees que notó Madison.

	Distancia del centro	Longitud del Arco				
		Sector de 40°	Sector de 50°	Sector de 40°	Sector de 90°	Sector de 40°
Círculo interno de adoquines	10 pies					
Círculo medio de adoquines	20 pies					
Círculo externo de adoquines	30 pies					

Cuando Madison examinó estos números, se dio cuenta de que se comportan de la misma manera que las medidas de grado: todos los arcos en el mismo sector tienen la misma medida de grado, y todos los arcos en el mismo sector tienen el mismo valor para la proporción de longitud de arco a radio. Esto hizo que se preguntara si estos nuevos números podrían usarse como una forma de medir ángulos al igual que los grados.

Más tarde esa noche, Madison compartió su descubrimiento con su hermana mayor, Katelyn, quien está tomando una clase de Cálculo en una universidad local. Katelyn le dijo a Madison que sus nuevos números para medir ángulos en términos de la proporción entre la longitud del arco y el radio se conocen como *radianes* y que hacen las reglas de Cálculo mucho más fáciles que si los ángulos se miden en grados.

Madison aprendió mucho al examinar la longitud del arco de los sectores de su jardín que decidió examinar las áreas de los sectores también.

- Completa esta tabla para Madison calculando las áreas de los sectores para los diferentes anillos del jardín.

	Distancia del centro	Área del Sector				
		Sector de 40°	Sector de 50°	Sector de 60°	Sector de 90°	Sector de 120°
Círculo interno de adoquines	10 pies					
Círculo medio de adoquines	20 pies					
Círculo externo de adoquines	30 pies					
Círculo extendido de adoquines	40 pies					

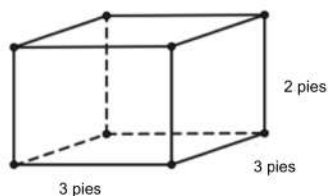
- ¿Notaste algo interesante en esta tabla?

PREPARACIÓN

Tema: Encontrar volumen y superficie de área

Encuentra el volumen y la superficie de área para las figuras tridimensionales a continuación.

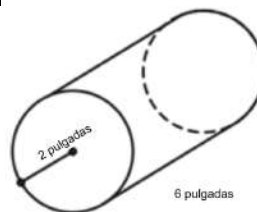
1.



a. Volumen =

b. Superficie de
área =

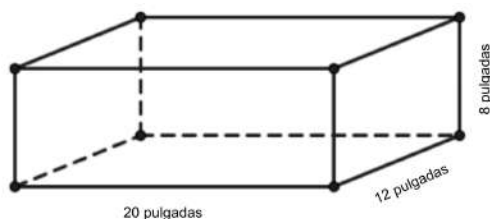
2.



a. Volumen =

b. Superficie de
área =

3.



a. Volumen =

b. Superficie de área =

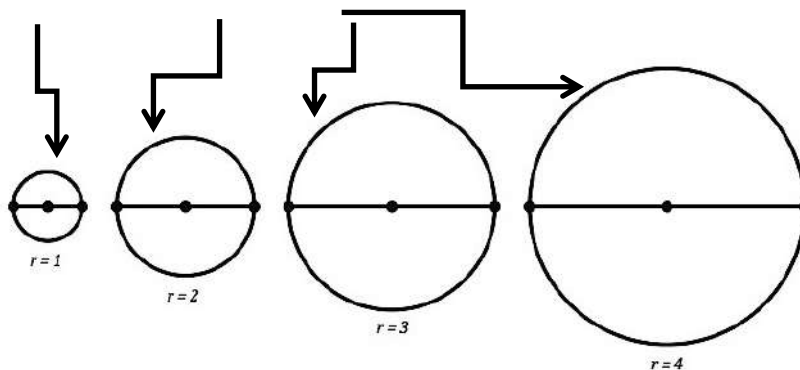
PRÁCTICA

Tema: Radianes

4. A continuación, se muestran círculos con radios de 1, 2, 3 y 4 unidades. Cada uno de ellos tiene un diámetro dibujado que los divide en dos sectores iguales. Encuentra la longitud del arco de la mitad de cada uno de estos círculos. Luego encuentra la medida del radián de la longitud del arco para cada uno.

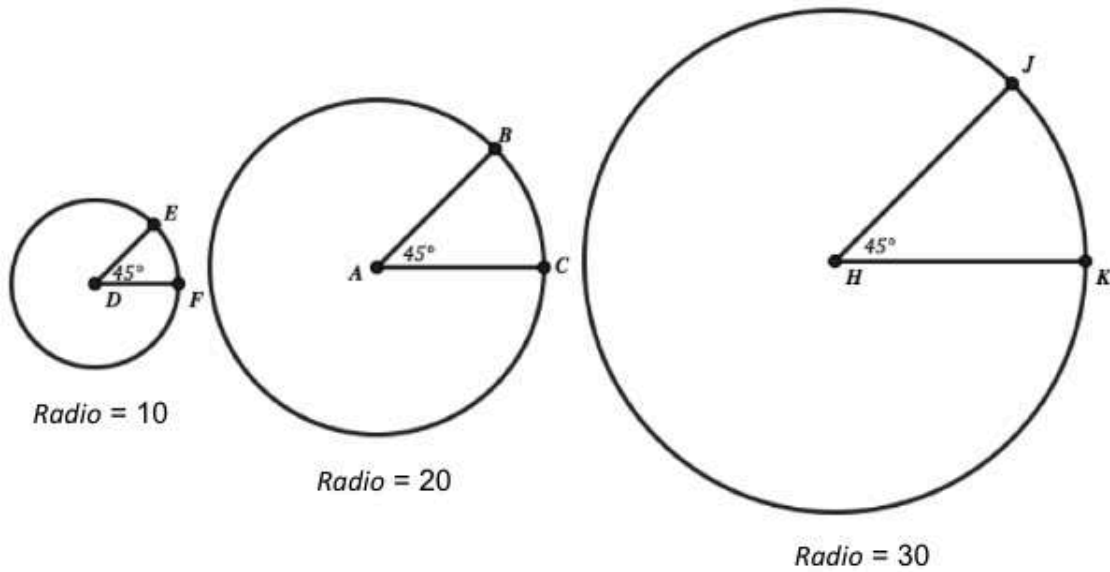
Encuentra la longitud de los arcos en esta mitad.

Radio	Longitud del arco de la mitad del círculo	Medida de Radian de la mitad del círculo
1		
2		
3		
4		



Need help? Visit www.rsgsupport.org

5. Hay tres círculos debajo, cada uno con un radio diferente. El mismo ángulo de medida de 45° se ha utilizado para crear un sector en cada círculo. Completa la tabla con la longitud de la medida del arco para el sector, la medida del radián y el área del sector



Radio	Longitud del arco	Radianes	Área del sector
10			
20			
30			

6. Usa los tres círculos en el problema 5 para encontrar las siguientes proporciones.

- a. $\widehat{EF}$ a $\widehat{BC}$ b. $\widehat{BC}$ a $\widehat{JK}$ c. $\widehat{EF}$ a $\widehat{JK}$

d. ¿Qué notas sobre las proporciones entre las longitudes de arco?

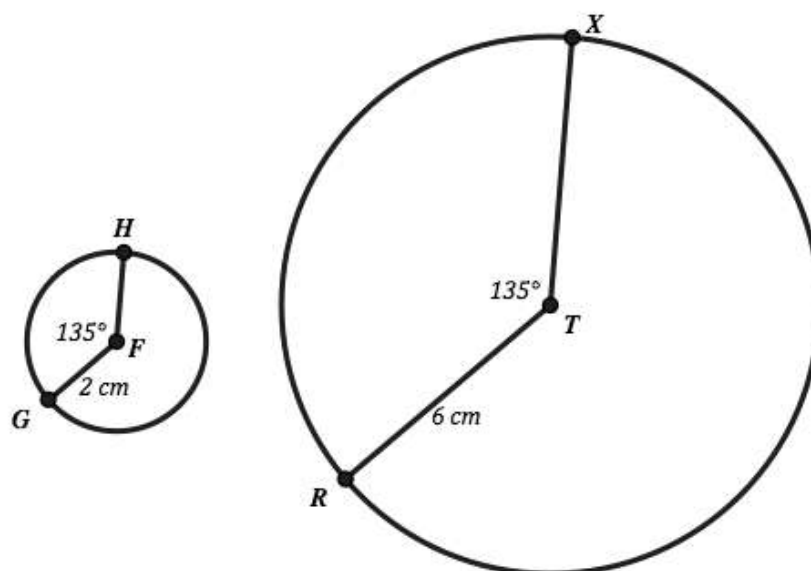
Need help? Visit www.rsgsupport.org

7. Considerando $\widehat{EF}$ en el problema 5. (a) ¿Cuántas copias de este arco se necesitarían para ser igual a la longitud de toda la circunferencia del círculo D? (b) ¿Sería esto cierto para los otros arcos y círculos en el problema anterior? ¿Por qué?

RENDIMIENTO

Tema: Ángulos iguales, sectores y arcos de diferentes tamaños, proporciones

Considera los sectores y longitudes de arco en los dos círculos a continuación para responder las preguntas.



8. Encuentra la longitud del arco del arco GH.
9. Encuentra la longitud del arco del arco RX.

Need help? Visit www.rsgsupport.org

10. Encuentra el área del pequeño sector en el círculo F.
11. Encuentra el área del pequeño sector en el círculo T.
12. La medida de radian del sector de 135° en cada círculo.
- 13 a. ¿Cuál es la proporción del arco GH al arco RX?
b. ¿Cuál es la proporción de las áreas de los dos sectores?

Need help? Visit www.rsgsupport.org

7.9 Rayos y Radianes

Actividad para Consolidar y Practicar Comprensión



CC BY Franco Pecchio
<https://flic.kr/p/5TWI dk>

En la tarea anterior, El Jardín Redondo de Madison, Madison encontró una nueva forma para medir ángulos. Al parecer, Madison no fue la primera persona en tener esta idea de medir un ángulo en términos de la longitud de arco, pero una vez que se dio cuenta de ello, decidió examinarlo más a fondo.

Estas son algunas de las preguntas de Madison. Ve si puedes responderlas.

1. Dado que un ángulo de 40° mide 0.698 radianes (a la milésima más cercana), un ángulo de 50° mide 0.873 radianes, y un ángulo de 60° mide 1.047 radianes, ¿qué ángulo, medido en grados, mide 1.000 radianes?
2. Un círculo mide 360° . ¿Cuántos radianes es eso?
3. La fórmula que Madison ha estado usando para calcular la medida del radián para un ángulo que mide n° en un círculo de radio r es
$$\frac{\frac{n^\circ}{360^\circ} (2\pi r)}{r} = x \text{ radianes}$$
 ¿Existe una fórmula más simple para convertir la medida de grado en medida de radián?
4. ¿Qué fórmula podrías usar para convertir la medida de radianes otra vez a grados?

At Madison está tan entusiasmada con la medida de radián que decide aprender más al respecto conectándose en línea a: <http://en.wikipedia.org/wiki/Radian>. Ella encuentra esta declaración: *un arco de un círculo con la misma longitud que el radio de ese círculo, corresponde a un ángulo de 1 radián. Un círculo completo corresponde a un ángulo de 2π radianes.*

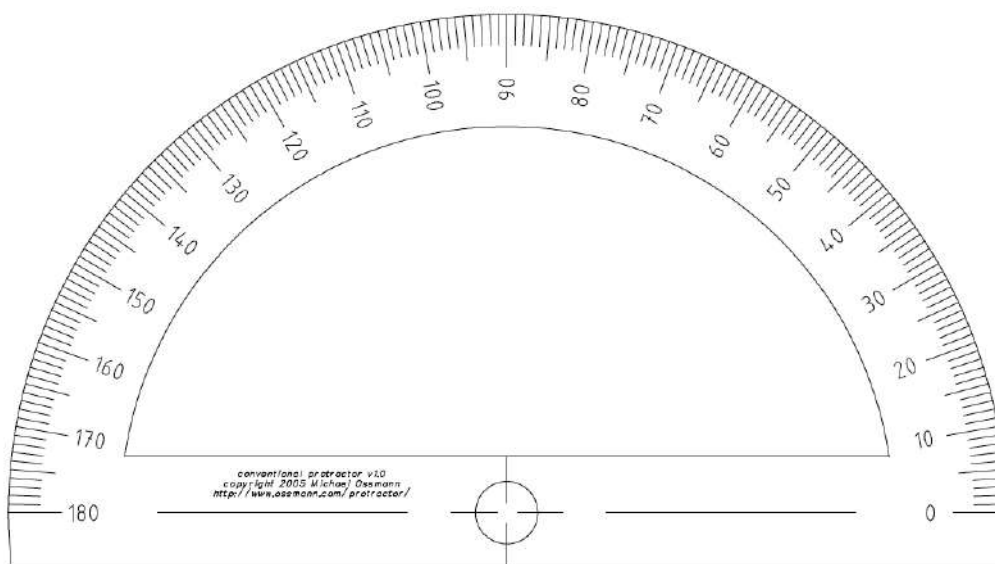
5. ¿Por qué es verdadera la primera oración en esta declaración?

6. ¿Por qué es verdadera la segunda oración en esta declaración?

A Madison le parece atractiva la idea de escribir medidas en radianes en términos de π . Como un círculo mide 2π radianes, razona que la mitad de un círculo, 180° , mediría π radianes; y que un cuarto de vuelta, un ángulo recto, mediría $\frac{\pi}{2}$ radianes. De repente, Madison se da cuenta de que, aunque ha estado sumida en sus pensamientos pensando en esta nueva idea, ha estado jugando con su transportador. Ahora su atención se centra en esta herramienta para medir ángulos.

Al igual que Madison, probablemente hayas usado un transportador para medir ángulos. Un transportador generalmente está diseñado para medir ángulos en grados. Madison decide que le gustaría crear un transportador para medir ángulos en radianes.

7. Diseña el siguiente transportador en radianes, usando fracciones que involucren π . Debes marcar cada 10° desde 0° hasta 180° . Por ejemplo, los rayos que pasen por la marca de ángulo de 0° y 40° formarían un ángulo con medida $\frac{2}{9}\pi$ (o $\frac{2\pi}{9}$) radianes, así que etiquetaríamos la marca de 40° como $\frac{2\pi}{9}$.

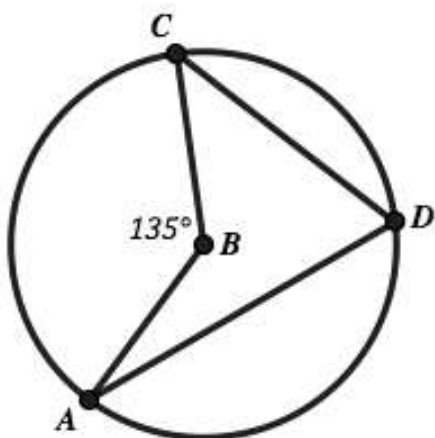


PREPARACIÓN

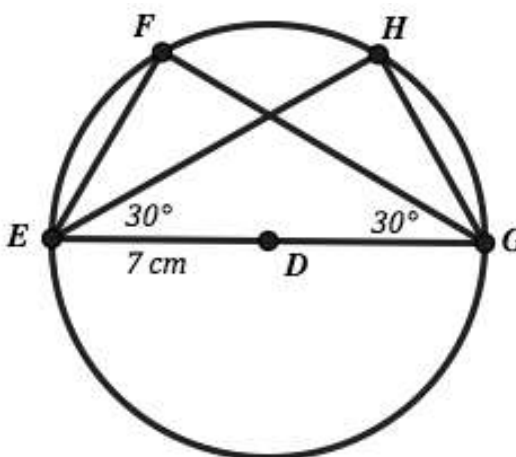
Tema: Ángulos, arco y áreas

Usa la información dada para encontrar los valores deseados.

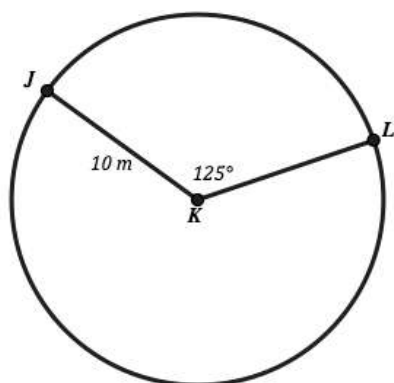
1. Dado el $\odot B$ y la medida del ángulo marcado, encuentra $m\angle ADC$ y encuentra la medida del $\widehat{AC}$



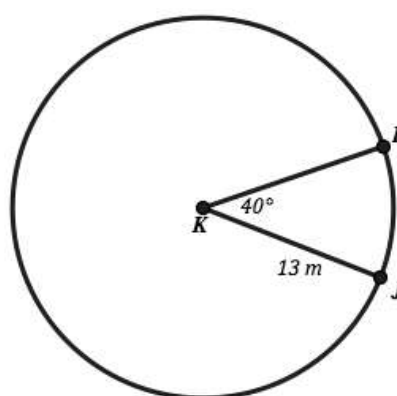
2. Dado el $\odot D$ y el radio marcado, encuentra la medida de $\widehat{FH}$ y encuentra $m\widehat{EF}$.



3. Dado el $\odot K$ y la medida del ángulo marcado, encuentra la medida del arco $\widehat{JL}$. Encuentra la medida de radiante que va con el ángulo de 125°



4. Dado $\odot K$ y la medida del ángulo marcado, encuentra el área del sector pequeño. Encuentra la longitud del arco.



Need help? Visit www.rsgsupport.org

PRÁCTICA

Tema: conversión entre radianes y grados

Convierte cada medida del ángulo a radianes o grados en función de lo que se le da.

5. $100^\circ =$ Radianes 6. $30^\circ =$ Radianes 7. $225^\circ =$ Radianes

8. $\frac{\pi}{3}$ Radianes = Grados 9. 5π Radianes = Grados 10. $\frac{5\pi}{4}$ Radianes = Grados

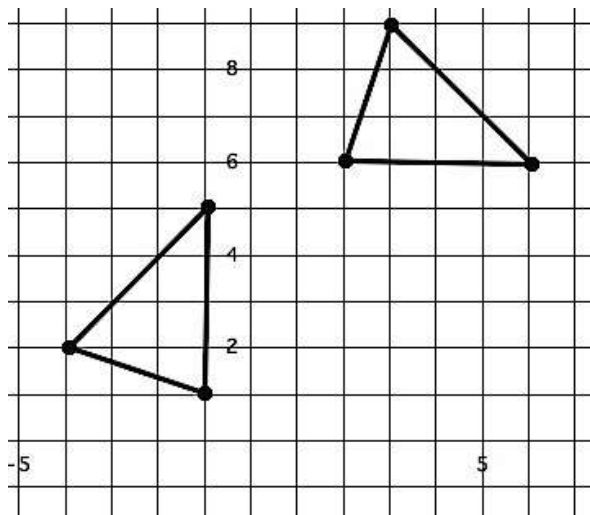
11. $270^\circ =$ Radianes 12. $90^\circ =$ Radianes 13. $150^\circ =$ Radianes

RENDIMIENTO

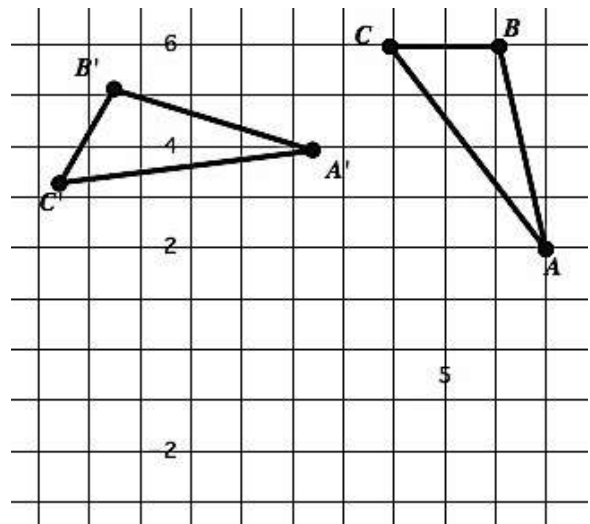
Tema: longitud del arco y área de sectores

Dadas las dos figuras a continuación, encuentra el centro de rotación que se usó. Luego usa un compás para dibujar los círculos concéntricos en los que se encuentran los puntos de vértice del triángulo.

14.



15.



Need help? Visit www.rsgsupport.org

7.10 Castillos de Arena

Actividad para Consolidar Comprensión



CC steve p2008

<https://flic.kr/p/6x3IdV>

Benji, Chau y Casandra planean participar en un concurso de construcción de castillos de arena patrocinado por una estación de radio local. El equipo ganador recibe una fiesta en la playa privada en un *resort* local para todos sus amigos. Para ser seleccionado para la competencia, el equipo debe enviar un dibujo de su castillo y la verificación de que el diseño se ajusta a las reglas.

Los tres amigos planean construir tres castillos idénticos, cada uno el doble del anterior. Esperan que replicar el mismo diseño tres veces, —mientras prestan atención a los detalles más pequeños—, impresionará a los jueces con su creatividad y su habilidad para esculpir arena.

Benji está desconcertado por un par de preguntas sobre la aplicación. Suenan como preguntas de matemáticas, y él quiere que Chau y Casandra se aseguren de que él las responda correctamente.

Proporciona la siguiente información sobre su escultura de arena:

- **¿Cuál es el área total de tu escultura de arena planificada?**

[Esta información le permitirá al comité de planificación ubicar esculturas de arena para que el público tenga fácil acceso a todas las esculturas. Recuerda que el área total ocupada por tu escultura no debe exceder los 50 pies cuadrados]

- **¿Cuál es el volumen total de arena requerido para construir tu escultura de arena?**

[Proporcionaremos arena limpia y colada para cada equipo, por lo que no nos haremos responsables de los desechos o sustancias nocivas que puedan estar presentes en la arena de la playa]

Certifico que la información anterior es correcta.

Firma del líder del equipo: _____ **Fecha:** _____

Los amigos solo han diseñado uno de los castillos, ya que los otros serán versiones ampliadas de este, siendo cada uno "el doble".

Después de estudiar el diagrama, Benji dijo: "Calculé que el área del castillo más pequeño es de 2.5 pies cuadrados, por lo que la siguiente ocupará 5 pies cuadrados y el más grande 10 pies cuadrados. Eso es un total de 17.5 pies cuadrados. Todo dentro de los límites".

1. ¿Qué piensas del comentario de Benji? Diseña un par de posibles "planos" para un castillo de arena que ocupará 2.5 unidades cuadradas de área. Luego escala cada diseño para que sea "dos veces más grande", y calcula el área. ¿Que notaste?
2. Imagina apilar cubos en tus "planos" de castillos de arena para crear una escultura 3-D simple. A continuación, amplía cada diseño para que sea "dos veces más grande" y calcula el volumen. ¿Que notaste?
3. ¿Cómo interpretaste la frase "el doble de grande" en tu trabajo en las preguntas 1 y 2? ¿Tu interpretación es la misma que la de Benji?
4. Para evitar confusiones, sería más apropiado para Benji y sus amigos decir que van a "aumentar proporcionalmente" su castillo de arena inicial por un factor de 2. Si el "plano" de un castillo de arena ocupa 2.5 pies cuadrados, ¿es posible calcular el área ocupada por un castillo de arena que ha sido ampliada por un factor de escala de 2, o el área de la forma ampliada depende de la forma de la figura original? Es decir, ¿los triángulos, paralelogramos, pentágonos, etc. se amplían de la misma manera? Escribe un argumento convincente explicando por qué sí o por qué no.

5. ¿Qué le sucede al perímetro del "plano" de tu castillo de arena cuando se aumenta proporcionalmente en un factor de 2?
6. Supón que tu "plano" de castillo de arena fue cortada de una pieza de espuma de polietileno de una pulgada de grosor. ¿Qué le sucede al volumen cuando este "plano tridimensional" se amplía proporcionalmente por un factor de 2?
7. Los planes para el castillo de arena más pequeño incluyen un prisma rectangular que mide 5 pulgadas de alto y tiene una base cuadrada con una longitud lateral de 2 pulgadas.
 - a. ¿Cuál es el volumen de arena requerido para hacer este prisma en el castillo de arena más pequeño?
 - b. ¿Cuál es el volumen de arena requerido para hacer este prisma en el castillo de arena mediano?
 - c. ¿Cuál es el volumen de arena requerido para hacer este prisma en el castillo de arena más grande?
 - d. ¿Cuál es el perímetro de cada uno de los cuadrados que forman las bases de cada uno de los tres prismas diferentes en cada uno de los tres castillos de arena?
 - e. ¿Cuál es la superficie total de cada uno de los prismas rectangulares que se utilizarán para construir cada uno de los tres castillos de arena? (Esta información es necesaria para construir redes para los moldes que se usarán para crear los prismas).

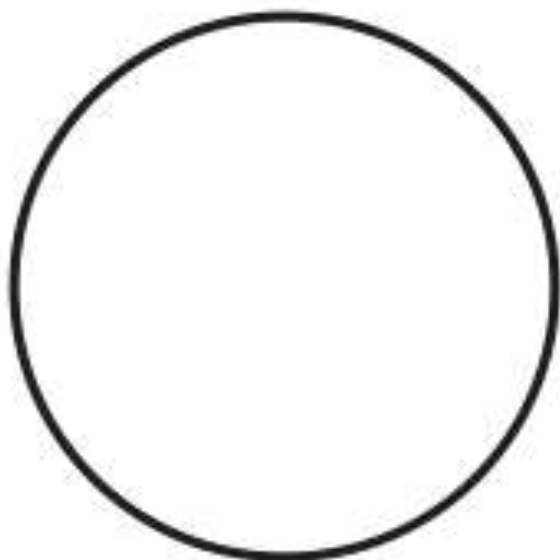
8. Los planes de Chau y Casandra para el castillo de arena más pequeño incluyen columnas en forma de cilindros con la base como un círculo con un radio de 1 pulgada. La altura de la columna es de 12 pulgadas.
- a. ¿Cuál es el volumen de arena requerido para hacer cada una de estas columnas en el castillo de arena más pequeño?
 - b. ¿Cuál es el volumen de arena requerido para hacer cada una de estas columnas en el castillo de arena mediano?
 - c. ¿Cuál es el volumen de arena requerido para hacer cada una de estas columnas en el castillo de arena más grande?
 - d. ¿Cuál es la circunferencia de cada uno de los círculos que forman las bases circulares de cada una de las tres columnas diferentes en los tres castillos de arena?
 - e. ¿Cuál es la superficie total de los cilindros, —incluyendo las dos bases circulares y el rectángulo que se envuelve para formar el cilindro—, en cada uno de los tres castillos de arena? (Esta información es necesaria para construir los moldes en los que se vaciará arena húmeda para crear las columnas).

PREPARACIÓN

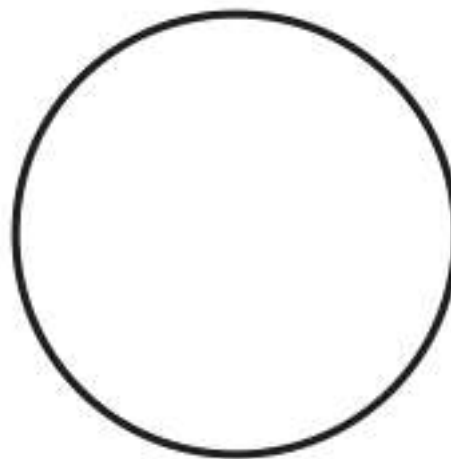
Tema: Encontrar el centro de un círculo

Ubica el centro de cada círculo a continuación. (Sugerencia: utiliza cuerdas del círculo para identificar el centro).

1.



2.



- Justifica tu trabajo para encontrar el centro de los círculos de arriba. ¿Por qué funciona? ¿Por qué señala el centro del círculo?
- En el círculo 1, dibuja un ángulo central y un ángulo inscrito que corte el mismo arco que el ángulo central. ¿Cuál es la relación entre la medida de un ángulo central y su ángulo inscrito correspondiente?
- En el círculo 2, dibuja un ángulo central y un ángulo circunscrito que corte el mismo arco que el ángulo central. ¿Cuál es la relación entre la medida de un ángulo central y su ángulo circunscrito correspondiente?

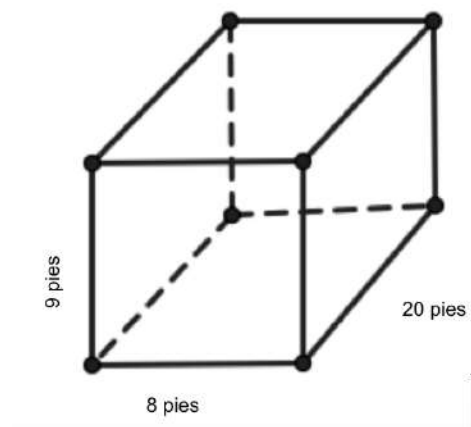
Need help? Visit www.rsgsupport.org

PRÁCTICA

Tema: Encontrar la superficie de área y volumen de cilindros y prismas rectangulares

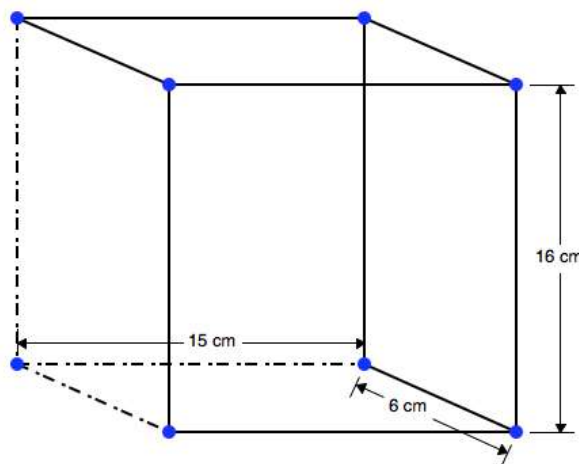
Encuentra la superficie de área y el volumen de cada prisma rectangular.

6.



7. Un prisma similar al de la izquierda que se ha agrandado por un factor de 4.

8.

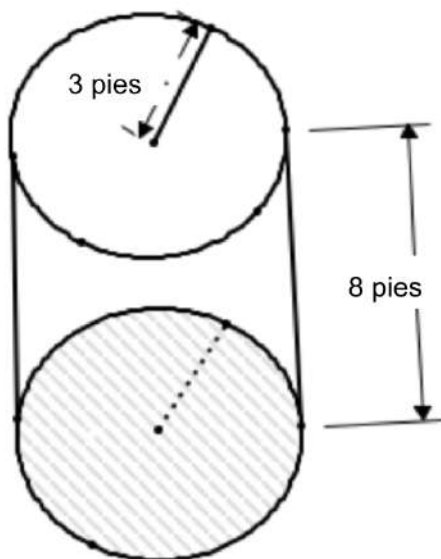


9. Un prisma similar al de la izquierda que se ha agrandado por un factor de 3.

Need help? Visit www.rsgsupport.org

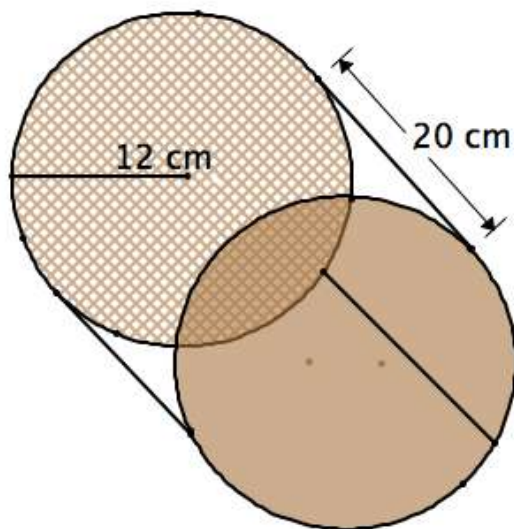
Encuentra la superficie de área y el volumen de cada cilindro.

10.



11. Un cilindro similar al de la izquierda que se ha agrandado por un factor de 2.

12.



13. Un cilindro similar al de la izquierda que se ha reducido por un factor de $\frac{1}{2}$.

Need help? Visit www.rsgsupport.org

RENDIMIENTO

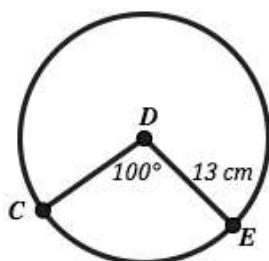
Tema: Convertir entre grados y radianes. Áreas de sectores.

Dada la otra medida, encuentra la medida que hace falta, ya sea en grados o radianes.

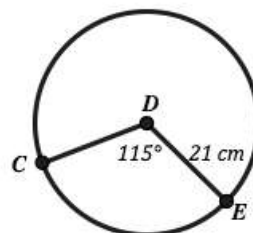
14. $120^\circ =$ Radianes 15. $270^\circ =$ Radianes 16. $210^\circ =$ Radianes
17. $\frac{3\pi}{4}$ Radianes = Grados 18. 4.7 Radianes = Grados 19. $\frac{\pi}{6}$ Radianes = Grados
20. $300^\circ =$ Radianes 21. $180^\circ =$ Radianes 22. $360^\circ =$ Radianes

Encuentra el área de cada sector.

23.

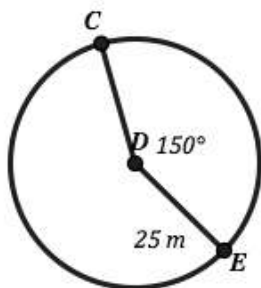


24.

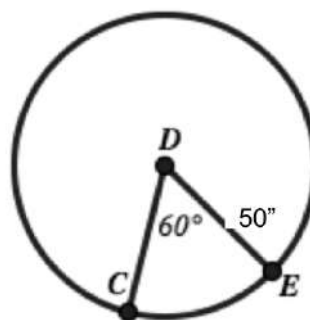


Encuentra la medida de la longitud de cada arco que se indica a continuación.

25.



26.



Need help? Visit www.rsgsupport.org

7.11 Huellas en la Arena

Actividad para Consolidar Comprensión



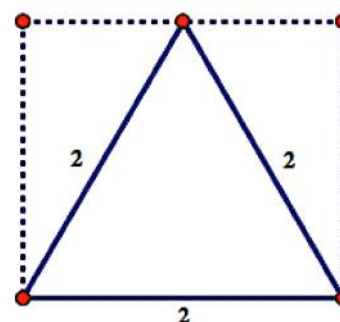
CC BY Jed Record
<https://flic.kr/p/nZBoLN>

Benji, Chau y Casandra están discutiendo las diversas formas tridimensionales que planean incluir en sus castillos de arena. Se preguntan cómo calcular el volumen de algunas de las formas que desean incluir. Chau quiere incluir prismas con bases triangulares equiláteras y Casandra quiere incluir prismas con bases hexagonales regulares. Benji solo sabe que la fórmula para un prisma rectangular es $L \times W \times H$, por lo que está tratando de descubrir cómo la forma de la base afecta el volumen del prisma.

Benji ha escuchado a su padre, que es arquitecto, hablar sobre el plano de un edificio, que se refiere a la forma y el área que un edificio ocupará en una parcela de tierra. A Benji le gusta el término, y se pregunta si pensar en el plano de los prismas que Chau y Casandra quieren incluir en los castillos de arena lo ayudará a descifrar sus volúmenes.

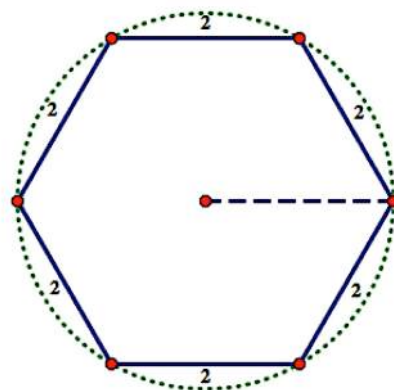
Chau quiere incluir un prisma triangular con bases que son triángulos equiláteros, 2 pulgadas de longitud y 10 pulgadas de alto. Benji está examinando el plano del prisma de Chau, inscrito en un rectángulo.

1. Desarrolla una estrategia para encontrar el volumen del prisma de Chau usando este dibujo que Benji creó para ayudarlo a visualizar el plano del prisma triangular de Chau.



Cassandra quiere incluir un prisma hexagonal con bases que son hexágonos regulares, 2 pulgadas de longitud, y el prisma tiene 10 pulgadas de alto. Benji está examinando el plano del prisma de Cassandra, inscrito en un círculo.

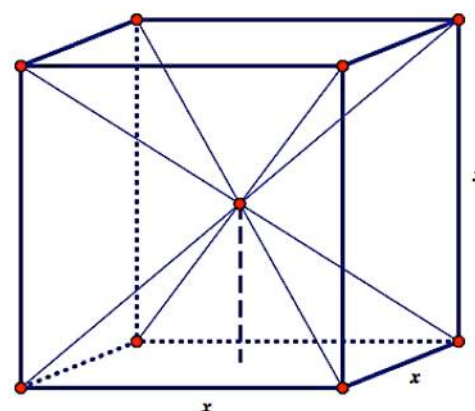
2. Desarrolla una estrategia para encontrar el volumen del prisma de Cassandra, usando este dibujo que Benji creó para ayudarlo a visualizar el plano del prisma hexagonal de Cassandra.



3. Describe un procedimiento general para encontrar el volumen de un prisma cuando se te da una descripción y las dimensiones de las bases del prisma.

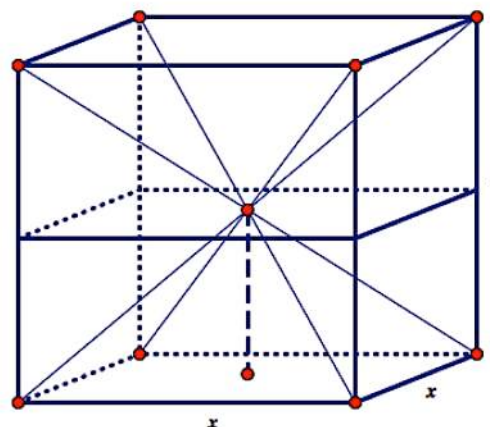
Benji ha descrito su estrategia para encontrar el volumen de cualquier prisma para Chau y Cassandra. Ambos están entusiasmados con sus hallazgos, pero Cassandra tiene otra pregunta. "Siempre me he preguntado por qué el volumen de pirámides o conos es siempre $\frac{1}{3}$ del volumen del prisma o cilindro con la misma base y altura".

Chau responde: "No estoy seguro por qué es cierto en general, pero creo que puedo explicarlo para una pirámide cuadrada cuya altura es la $\frac{1}{2}$ de la longitud del lado del cuadrado que forma la base". Chau rápidamente dibuja el siguiente cubo con sus cuatro diagonales. Ella ha etiquetado la longitud de cada borde del cubo como x pulgadas.



4. Las diagonales dividen el cubo en 6 pirámides congruentes. (Cada cara del cubo es la base de una de las pirámides). ¿Cómo se relaciona el volumen de cada una de estas pirámides con el volumen del cubo? Usa el dibujo de Chau y la relación entre los volúmenes del cubo y las pirámides para obtener una fórmula para el volumen de una de las pirámides en términos de x .

5. La pirámide en la pregunta 4 no tiene la misma altura que el cubo. Encuentra el volumen del prisma rectangular que tiene la misma base y altura que una de las pirámides.



6. ¿Cómo se relaciona el volumen de la pirámide descrito en la pregunta 4 con el volumen del prisma rectangular descrito en la pregunta 5?

PREPARACIÓN

Tema: Uso de la fórmula de distancia

En Matemáticas 1 debiste haber desarrollado la fórmula de distancia

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Encuentra la distancia exacta entre los dos puntos dados.

1. A (3, -7) B (-9, -2) 2. C (122, 367) D (106, 304) 3. E (-231, -29) F (-220, 31)

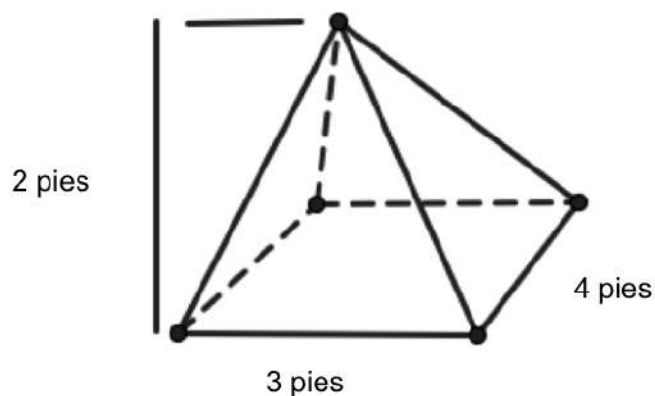
4. G (2, -4) H (-1, 3) 5. K (1, 0) L (0, $\sqrt{2}$) 6. M (-11, 7) P (-6, $\sqrt{6}$)

PRÁCTICA

Tema: Encontrar superficie de área y volumen para sólidos similares

Encuentra la superficie de área y el volumen de cada pirámide o cono.

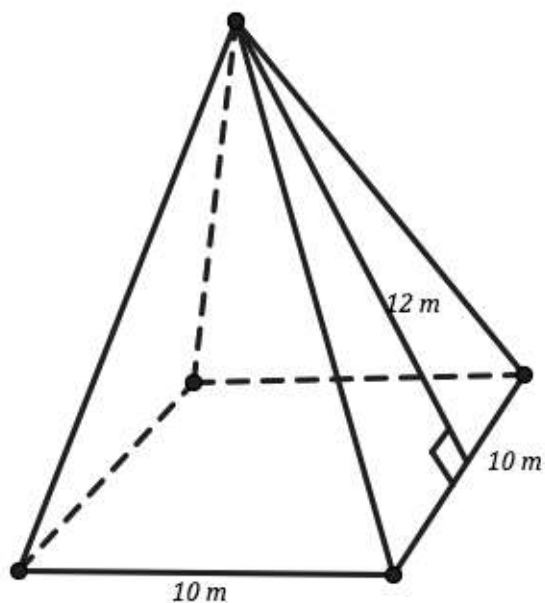
7.



8. Una pirámide que es similar a la pirámide en el número 7 pero aumentada por un factor de 3.

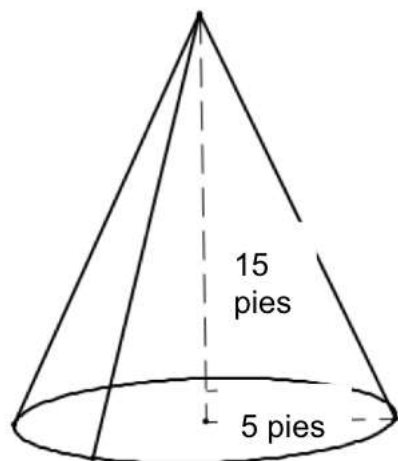
Need help? Visit www.rsgsupport.org

9.



10. Una pirámide que es similar a la pirámide en el número 9 pero aumentada por un factor de 5.

11.



12. Un cono que es similar al de la izquierda que se ha ampliado por un factor de 4.

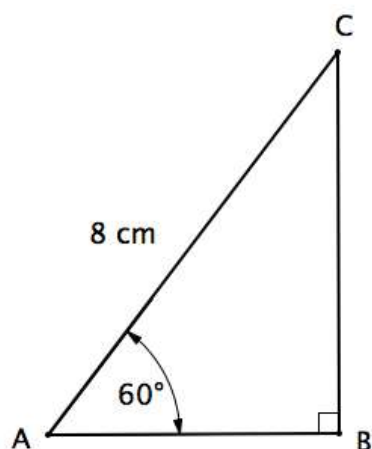
Need help? Visit www.rsgsupport.org

RENDIMIENTO

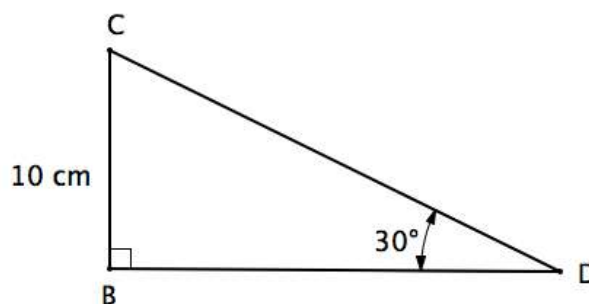
Tema: Encontrar las medidas faltantes en un triángulo

Encuentra los ángulos y lados faltantes en cada triángulo.

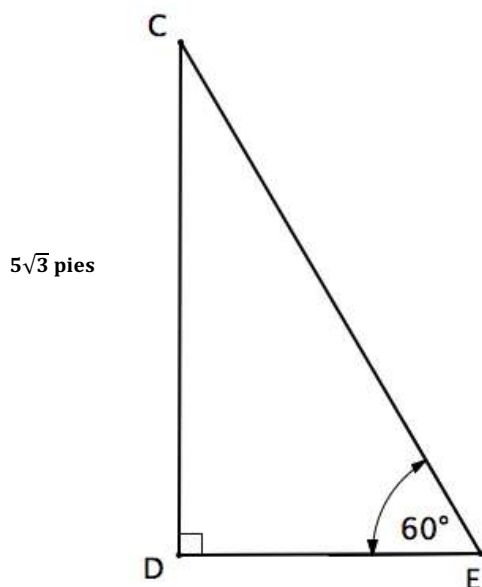
13.



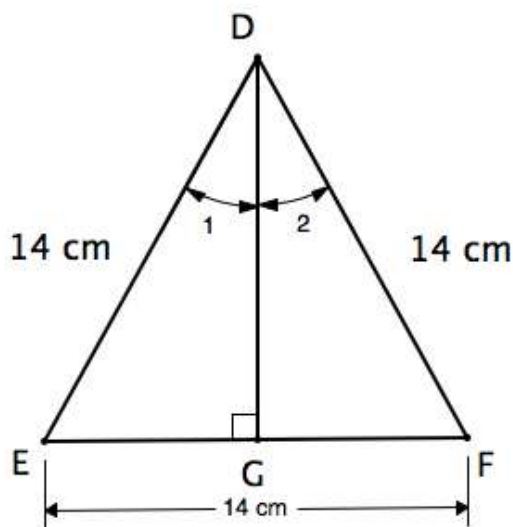
14.



15.



16. Asegúrate de encontrar $m\angle 1$ y $m\angle 2$ y DG



Need help? Visit www.rsgsupport.org



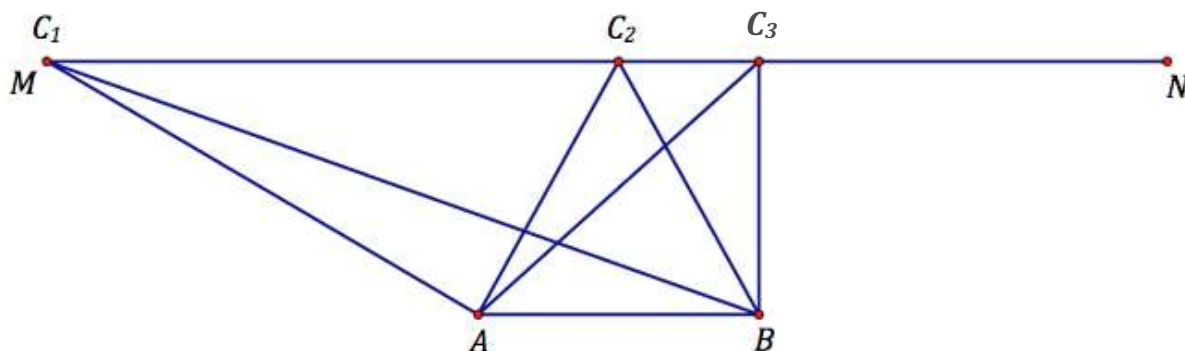
CC BY Photo Atelier
<https://flic.kr/p/9Zgc1F>

7.12 Cavalieri al Rescate

Actividad para Consolidar Comprensión

Carlos, Clarita, y Zac están jugando un juego de geometría. Cada jugador selecciona un punto C en el segmento de línea $\overline{MN}$, que es paralelo al segmento de línea $\overline{AB}$. Los puntos A , B y C forman los vértices de un triángulo. El jugador que crea el triángulo con el área más grande gana el juego.

Carlos ha colocado su punto en la posición C_1 , Clarita ha seleccionado el punto C_2 , y Zac ha elegido ubicar su punto en C_3 . Ahora están discutiendo sus elecciones antes de calcular las áreas de cada triángulo para determinar el ganador.



Carlos: Elegí mi punto para que el triángulo se extendiera lo más a la izquierda posible, encerrando una gran cantidad de área.

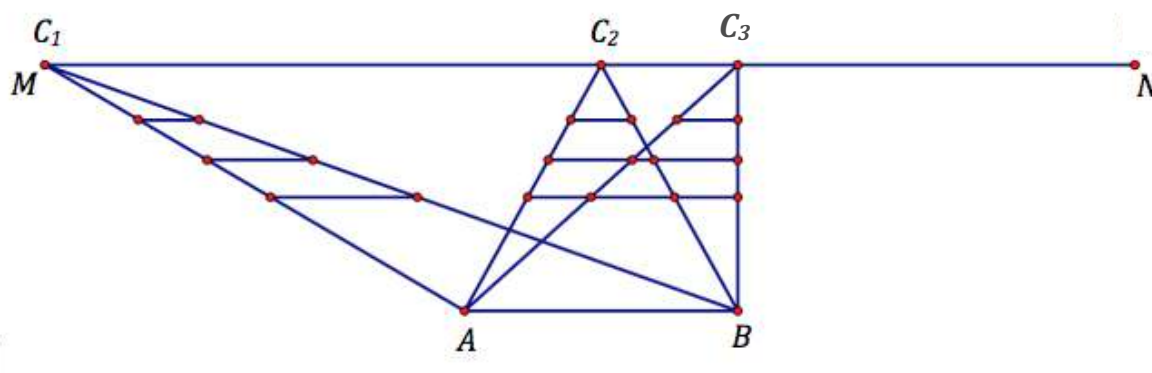
Clarita: Pensé que sería mejor crear un triángulo isósceles para que el triángulo fuera simétrico con respecto a su altitud, por lo que elegí un punto en el segmento MN directamente sobre el punto medio del segmento AB .

Zac: Pensé que un triángulo rectángulo crearía el triángulo más grande, ya que mi triángulo sería la mitad de un rectángulo.

1. Sin hacer ningún cálculo, ¿quién crees que creó el triángulo con el área más grande?

2. Si estuvieras jugando el juego con Carlos, Clarita y Zac, ¿dónde colocarías tu punto C? Marca un punto en el segmento MN para representar tu mejor estimación. Puedes marcar tu punto en la misma posición que uno que ya ha sido elegido, si crees que ese punto formará el triángulo más grande.
3. Ahora es el momento de determinar un ganador. Realiza las medidas necesarias para calcular quién ganó el juego. ¿Cuál estrategia ganó?

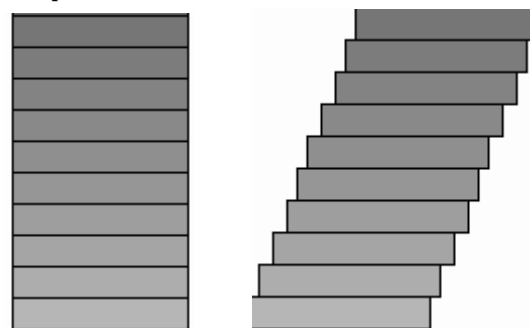
Carlos, Clarita y Zac inicialmente se sorprendieron por los resultados y se preguntaron por qué las imágenes del triángulo eran tan engañosas. Comenzaron a preguntarse si realmente podrían creer sus cálculos. Entonces Carlos sugirió un experimento. Dibujó una serie de segmentos de línea en cada triángulo, con cada segmento paralelo a la base del triángulo, $\overline{AB}$, y con los segmentos correspondientes en cada uno de los triángulos dibujados a la misma distancia sobre la base, como se muestra en el siguiente diagrama. Carlos luego midió cada uno de los segmentos de línea correspondientes.



4. Completa el experimento de Carlos midiendo cada uno de los segmentos de línea correspondientes. ¿Qué notaste? ¿Qué sugiere esta observación sobre las áreas de los triángulos y por qué?

Clarita dijo: "Se siente como si estuvieras tratando cada triángulo como si estuviera compuesto por un montón de capas o rebanadas".

Zac, inspirado por el comentario de Clarita, sacó un puñado de centavos de su bolsillo y los apiló para formar un cilindro. "Puedo calcular el volumen de esta pila de monedas usando la fórmula $V = Bh$. Pero, ¿y si inclino la pila para que se parezca más a la Torre Inclinada de Pisa? Ahora, ¿cómo averiguo cuánto espacio ocupan las monedas?"



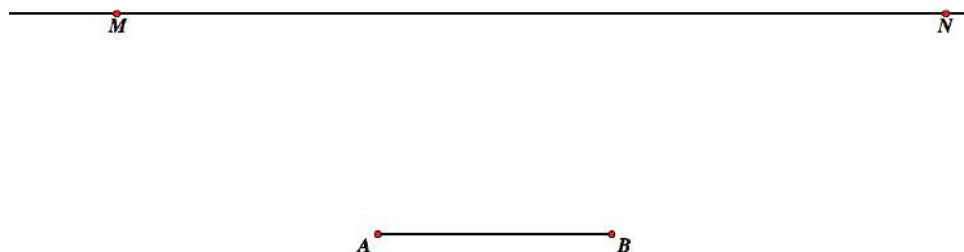
Carlos y Clarita sonrieron ante la forma ingeniosa de Zac de ilustrar una idea que era nueva para ambos.

Estaban emocionados de contarle a su maestro de geometría sobre su descubrimiento y el principio de Zac. Se sorprendieron al escuchar que Zac no era la primera persona en pensarlo, y que era conocido como el principio de Cavalieri.

5. En tus propias palabras, indica lo que piensas que es el principio de Cavalieri, basado en el experimento del triángulo y la ilustración de la pila de monedas.

Prueba otro experimento con el principio de Cavalieri. Una vez más, la línea MN es paralela al segmento AB . Mide la longitud del segmento AB , y luego marca el segmento congruente CD en cualquier lugar de la línea MN . Conecta los puntos finales del segmento AB a los puntos finales del segmento CD para formar un paralelogramo. Marca otro segmento EF en la línea MN para que EF también sea congruente con AB . Conecta los puntos finales del segmento AB a los puntos finales del segmento EF para formar otro paralelogramo.

6. Usa estos dos paralelogramos no congruentes para ilustrar el principio de Cavalieri. ¿Qué puedes decir sobre las áreas de estos dos paralelogramos y qué te convence de que esto es cierto?



Mientras que la demostración de Zac con los centavos ha convencido a Carlos y Clarita de que el volumen de prismas y cilindros donde las capas paralelas no están directamente una encima de la otra, es lo mismo que los **prismas rectangulares** correspondientes y los **cilindros circulares**, se preguntan sobre **pirámides** y **conos** donde el vértice del cono no está directamente sobre el centro de la base. "¿Cómo se puede encontrar el volumen de este tipo de pirámides y conos?" Al consultar en línea, aprendieron que estos tipos de sólidos se llaman **prismas oblicuos, pirámides oblicuas, cilindros oblicuos y conos oblicuos**.

Mientras estuvo en línea, Carlos encontró esta información: La fórmula del volumen de un prisma rectangular o cilindro circular es $V = Bh$, B es la superficie de área que forma la base, y h es la altura del prisma o cilindro. El volumen de una pirámide o cono es $1/3$ del volumen de un prisma o cilindro con la misma base y altura.

Clarita encontró esta información: la fórmula del volumen de un prisma o cilindro es $V = Bh$, B es el área de las secciones transversales congruentes paralelas a la base, y h es la altura del prisma. El volumen de una pirámide o cono es $1/3$ del volumen de un prisma o cilindro con la misma base y altura.

7. ¿Cómo difieren estas dos declaraciones y qué implican esas diferencias?

Carlos, Clarita y Zac encuentran animaciones interesantes y actividades en *GeoGebra* que les proporcionan información adicional sobre el principio de Cavalieri y los volúmenes de pirámides y conos oblicuos.

Carlos encuentra una aplicación en *GeoGebra* que lo ayuda a visualizar por qué el volumen de una pirámide es $1/3$ del volumen de un prisma con la misma base (es decir, las bases son formas congruentes) y la altura: <https://www.geogebra.org/m/VNjkbxgE>

Clarita encuentra una aplicación en *GeoGebra* que utiliza el principio de Cavalieri para ayudarla a visualizar por qué todas las pirámides con la misma base (es decir, las bases de cada pirámide son formas congruentes) y la misma altura, tendrán el mismo volumen:

<https://www.geogebra.org/m/NwcBfSwZ#material/JNdR7RY7>

Zac encuentra esta aplicación en GeoGebra que usa el principio de Cavalieri para llegar a la fórmula del volumen de una esfera. Se sorprende al saber que el principio de Cavalieri no requiere que las capas paralelas en las dos formas deban ser congruentes, solo que necesitan tener la misma área: <https://www.geogebra.org/m/a9jQQQFz>

8. Examina cada una de las aplicaciones de GeoGebra que Carlos, Clarita y Zac encontraron en línea y resume lo que aprendes de cada aplicación. Se específico sobre cómo cada aplicación puede sugerir un argumento matemático para el reclamo, no solo un argumento visual.

- a. Carlos:

- b. Clarita:

- c. Zac:

PREPARACIÓN

Tema: Multiplicar binomios y factorizar ecuaciones cuadráticas en dos factores lineales

Multiplica los dos factores y simplifica sumando los términos similares.

1. $(5x - 7)(-3x + 8)$

2. $(2x + 3)(6x + 1)$

3. $(-2x - 7)(-7x - 1)$

Factoriza cada expresión cuadrática en dos binomios.

4. $10x^2 + 38x + 36$

5. $6x^2 + 17x - 14$

6. $8x^2 - 2x - 15$

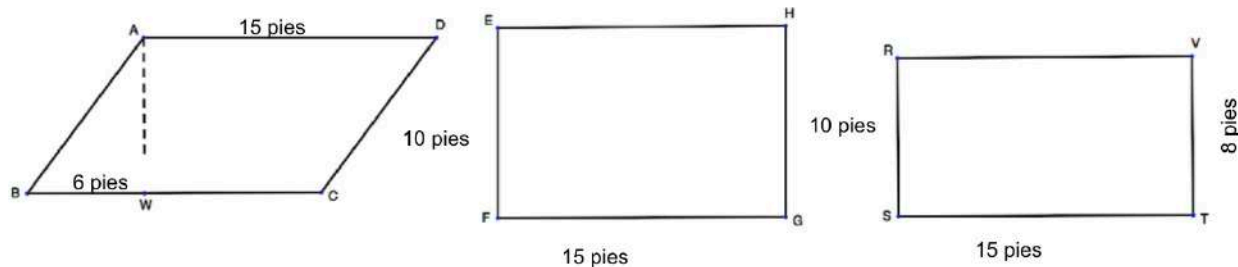
PRÁCTICA

Tema: Aplicando el teorema de Cavalieri.

7. A continuación hay 3 cuadriláteros. Compara los perímetros y las áreas. ¿En qué son iguales y en qué son diferentes?

¿Para cuál de los cuadriláteros son los cálculos iguales?

Explica por qué esto está sucediendo.



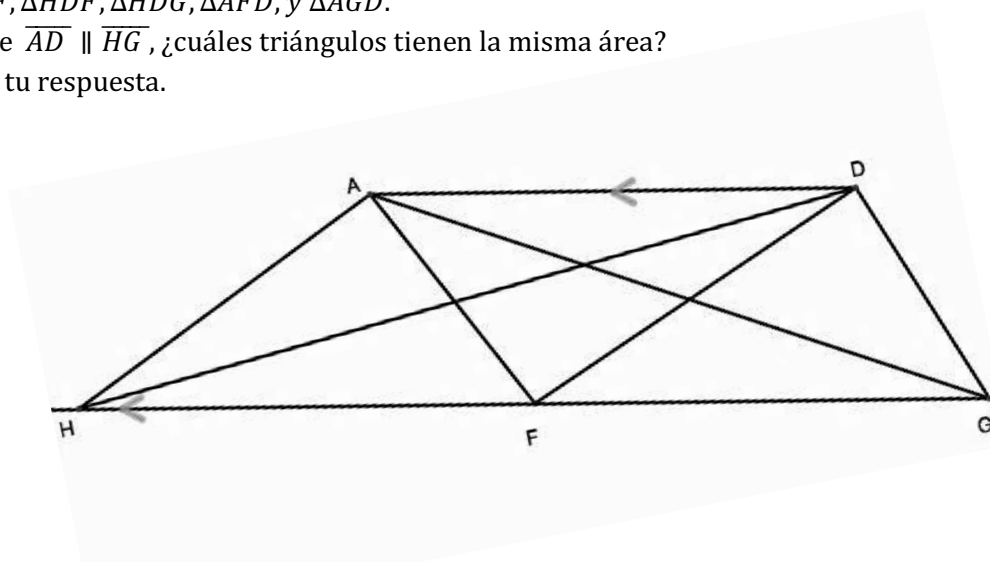
Need help? Visit www.rsgsupport.org

8. La figura a la derecha contiene varios triángulos:

$\triangle HAF$, $\triangle HDF$, $\triangle HDG$, $\triangle AFD$, y $\triangle AGD$.

Dado que $\overline{AD} \parallel \overline{HG}$, ¿cuáles triángulos tienen la misma área?

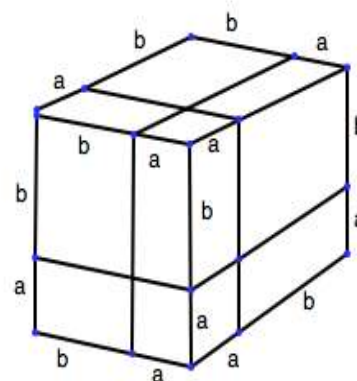
Justifica tu respuesta.



9. La figura de la derecha muestra un cubo con bordes de longitud $(a + b)$.

El cubo ha sido cortado en pedazos por tres planos paralelos a sus caras.

- Escribe una expresión para el volumen del cubo en términos de a y b .
- ¿En cuántos pedazos está cortado el cubo?
- ¿Cuántas de estas piezas son también cubos?
- Escribe una ecuación en términos de a y b para el volumen de cada cubo que encuentraste.
- ¿Cuántas piezas tienen un volumen de a^2b ?
- Escribe el volumen de la figura como la suma de los volúmenes de sus piezas.
- Muestra el trabajo que demuestra la equivalencia entre las formas factorizada y expandida.



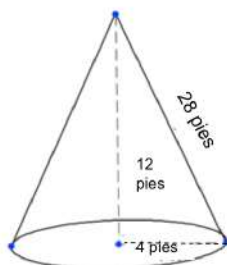
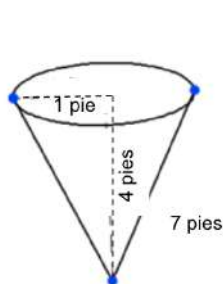
Need help? Visit www.rsgsupport.org

RENDIMIENTO

Tema: Sólidos congruentes y similares

Determina si cada par de sólidos es similar, congruente o ninguno. Justifica tus respuestas.

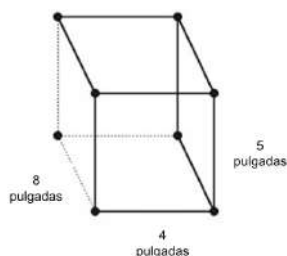
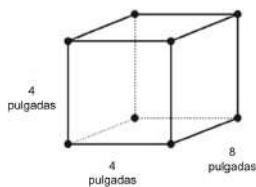
10.



¿Similar, congruente, o ninguno?

¿Cómo lo sabes?

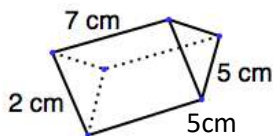
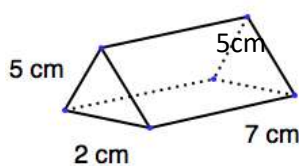
11.



¿Similar, congruente, o ninguno?

¿Cómo lo sabes?

12.



¿Similar, congruente, o ninguno?

¿Cómo lo sabes?

Need help? Visit www.rsgsupport.org

This book is shared online by Free Kids Books at <https://www.freekidsbooks.org> in terms of the creative commons license provided by the publisher or author.

want to find more books like this?



<https://www.freekidsbooks.org>

Simply great free books -

Preschool, early grades, picture books, learning to read,
early chapter books, middle grade, young adult,

Pratham, Book Dash, Mustardseed, Open Equal Free, and many more!

Always Free – Always will be!

Legal Note: This book is in CREATIVE COMMONS - Awesome!! That means you can share, reuse it, and in some cases republish it, but only in accordance with the terms of the applicable license (not all CCs are equal!), attribution must be provided, and any resulting work must be released in the same manner.

Please reach out and contact us if you want more information:

<https://www.freekidsbooks.org/about> Image Attribution: Annika Brandow, from You! Yes You! CC-BY-SA. This page is added for identification.