mathematics vision project

Transforming Mathematics Education

SECONDARY MATH TWO

An Integrated Approach

MÓDULO 8

Círculos y Otros Cónicos

MATHEMATICSVISIONPROJECT.ORG

The Mathematics Vision Project

Scott Hendrickson, Joleigh Honey, Barbara Kuehl, Travis Lemon, Janet Sutorius

MÓDULO 8 - TABLA DE CONTENIDO

CÍRCULOS Y OTROS CÓNICOS

Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Círculos y otros cónicos 8.6

Actividad de clase: 8.7H Operando con Recursos Limitados – Actividad para Consolidar Comprensión

Explorar las características de las elipses y escribir la ecuación de una elipse usando el hecho de que la suma de las distancias de los focos es constante. (G.GPE.3) (+)

Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Círculos y otros cónicos 8.7H

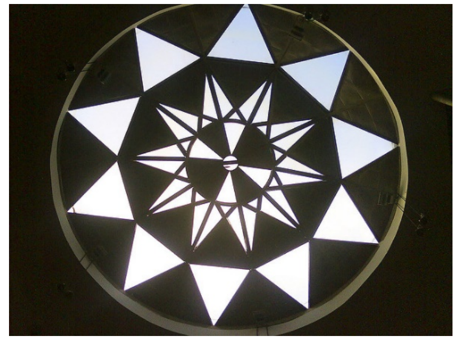
Actividad de clase: 8.8H ¿Qué pasa si . . . ? – Actividad para Consolidar Comprensión

Explorar las características de hipérbolas escribiendo la ecuación de una hipérbola usando el hecho de que la diferencia de las distancias de los focos es constante. (G.GPE.3) (+)

Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Círculos y otros cónicos 8.8H

8.1 Triángulos circulares

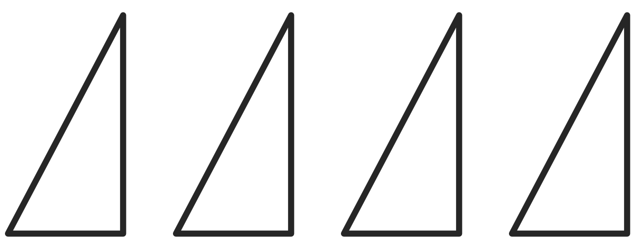
(o círculos triangulares)



Actividad para Desarrollar Comprensión

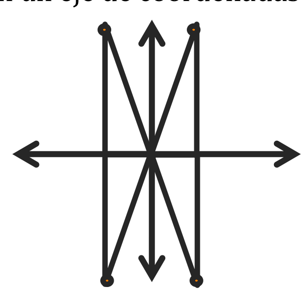
Usando la esquina de un trozo de papel de colores y una regla, recorta un triángulo rectángulo con una hipotenusa de 6", así:

Usa este triángulo como un patrón para cortar tres más como este, para que tengas un total de cuatro triángulos congruentes.



1. Elige uno de los catetos del primer triángulo y etiquétalo x y rotula el otro cateto y. ¿Cuál es la relación entre los tres lados del triángulo?

2. Cuando te lo pidan, lleva los triángulos al pizarrón y colócalos en un eje de coordenadas como este:



Marca el punto al final de cada hipotenusa con un alfiler.

3. ¿Qué figura se forma con los alfileres después de que la clase ha colocado todos sus triángulos? ¿Por qué esta construcción crearía esta figura?

4. ¿Cuáles son las coordenadas del alfiler que has colocado en:
   a. ¿el primer cuadrante?
   b. ¿el segundo cuadrante?
   c. ¿el tercer cuadrante?
   d. ¿el cuarto cuadrante?

5. Ahora que los triángulos se han colocado en el plano de coordenadas, algunos de sus triángulos tienen lados de longitud *-x o -y.* ¿Es la relación $x^2 + y^2 = 6^2$ todavía verdadera para estos triángulos? ¿Por qué si o por qué no?

6. ¿Cuál sería la ecuación de la gráfica que es el conjunto de todos los puntos que están a 6" de distancia del origen?

7. ¿Está el punto (0, -6) en la gráfica? ¿Qué tal el punto (3, 5.193)? ¿Cómo puedes decirlo?

8. Si la gráfica se traduce 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba, ¿cuál sería la ecuación de la nueva gráfica? Explica cómo encontraste la ecuación.

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Factorización de productos especiales

Factoriza lo siguiente como la diferencia de 2 cuadrados o como un trinomio cuadrado perfecto. No factorices si no son ni lo uno ni lo otro.

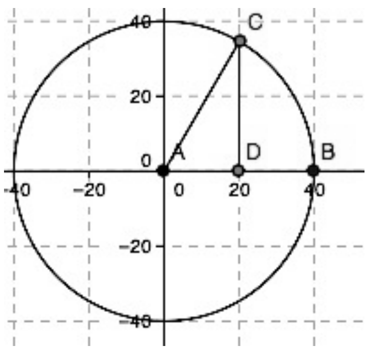
1. $b^2 - 49$
2. $b^2 - 2b + 1$
3. $b^2 + 10b + 25$
4. $x^2 - y^2$
5. $x^2 - 2xy + y^2$
6. $25x^2 - 49y^2$
7. $36x^2 + 60xy + 25y^2$
8. $81a^2 - 16d^2$
9. $144x^2 - 312xy + 169y^2$

PRÁCTICA

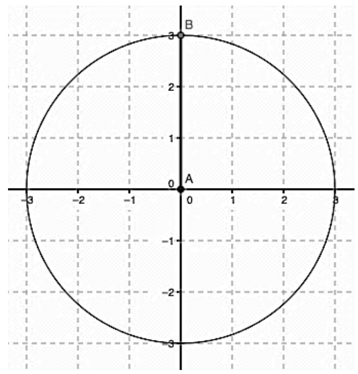
Tema: Escribir las ecuaciones de los círculos

Escribe la ecuación de cada círculo centrado en el origen.

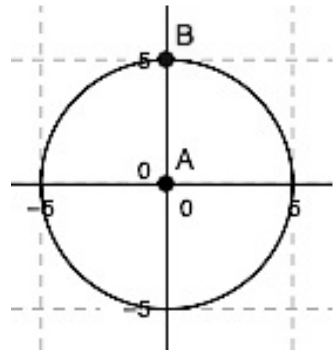
10.



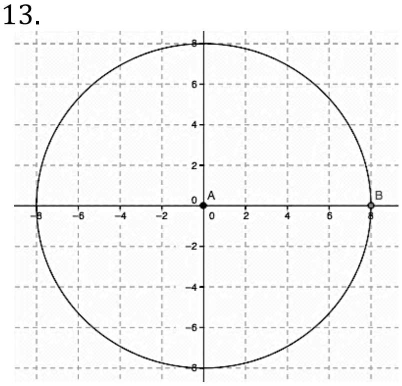
11.



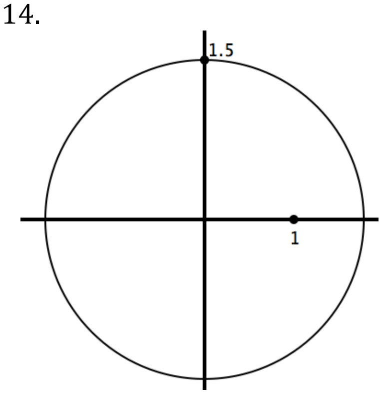
12.



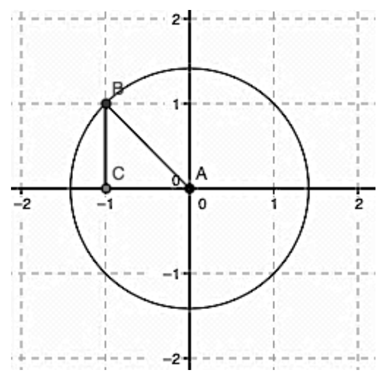
13.



14.



15.



RENDIMIENTO

Tema: Verificación de los triples pitagóricos

Identifica qué conjuntos de números podrían ser los lados de un triángulo rectángulo. Muestra tu trabajo.

16. $\{9, 12, 15\}$

17. $\{9, 10, \sqrt{19}\}$

18. $\{1, \sqrt{3}, 2\}$

19. $\{2, 4, 6\}$

20. $\{\sqrt{3}, 4, 5\}$

21. $\{10, 24, 26\}$

22. $\{\sqrt{2}, \sqrt{7}, 3\}$

23. $\{2\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, 9\}$

24. $\{4ab^3\sqrt{10}, 6ab^3, 14ab^3\}$

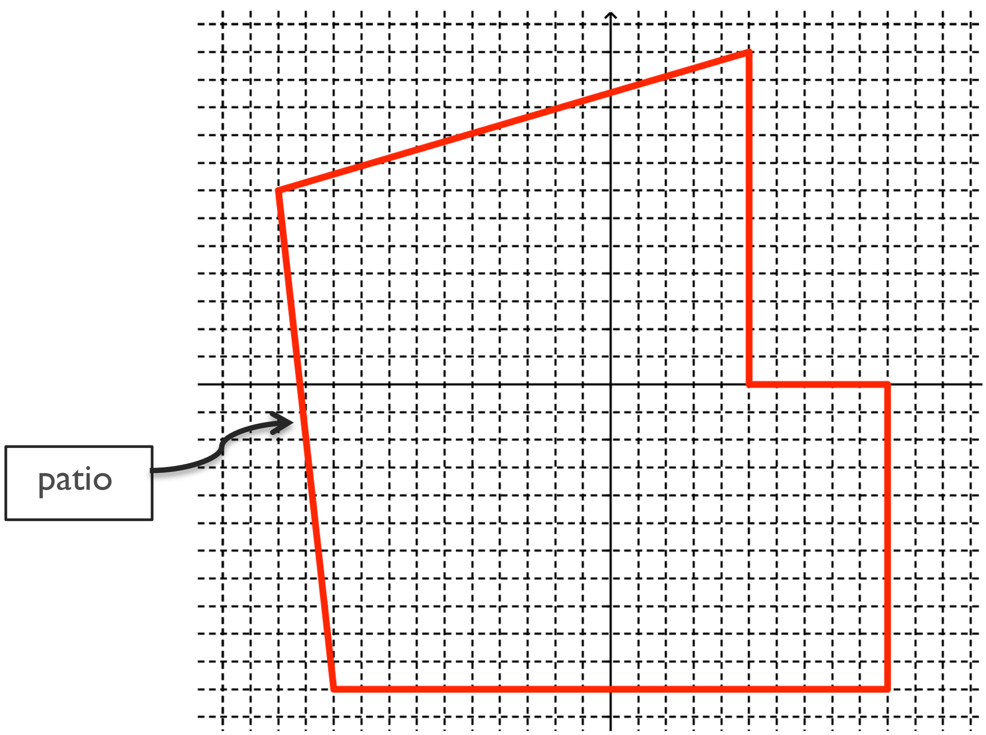
8.2 Centrándose

Actividad para Solidificar Comprensión

La familia de Malik ha decidido instalar un nuevo sistema de aspersión en su jardín. Malik se ha ofrecido como voluntario para establecer el sistema. Los aspersores están disponibles en la ferretería en los siguientes tamaños:

- Círculo completo, radio máximo de 15 '
- Medio círculo, radio máximo de 15 '
- Cuarto de círculo, radio máximo de 15 '

Todos los rociadores se pueden ajustar para que rocíen un radio más pequeño. Malik necesita asegurarse de que todo el jardín se regará, lo que él sabe requerirá que algunos de los patrones circulares de agua se superpongan. Él saca un pedazo de papel cuadriculado y comienza con un diagrama a escala del patio. En este diagrama, la longitud del lado de cada cuadrado representa 5 pies



1. A medida que comienza a pensar en la ubicación los aspersores en el césped, sus padres le dicen que trate de cubrir todo el césped con la menor cantidad de aspersores posible para que puedan ahorrar algo de dinero. La ecuación del primer círculo que dibuja Malik para representar el área regada por el rociador es:

$$(x+25)^2+(y+20)^2=225$$

   Dibuja este círculo en el diagrama con un compás.

2. Establece una configuración posible para el sistema de rociado que incluya el primer patrón de rociadores que dibujó en el # 1.

3. Encuentra la ecuación de cada uno de los círculos completos que has dibujado.

Malik escribió la ecuación de uno de los círculos y simplemente porque le gusta jugar con el álgebra, hizo esto:

Ecuación original: $(x-3)^2+(y+2)^2 = 225$

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=225$$

$$x^2+y^2-6x+4y-212=0$$

Malik pensó: "Eso es genial. Es como una forma diferente de la ecuación. Supongo que podría haber diferentes formas de la ecuación de un círculo como si hubiera diferentes formas de la ecuación de una parábola o la ecuación de una línea. "Mostró su ecuación a su hermana, Sapana, y ella pensó que estaba loco. Sapana, dijo, "Esa es una ecuación loca. Ni siquiera puedo decir dónde está el centro o la longitud del radio. "Malik dijo:" Ahora es como un rompecabezas para ti. Te daré una ecuación en la nueva forma. Apuesto a que no puedes descubrir dónde está el centro ".

Sapana dijo: "Por supuesto, que puedo". Haré lo mismo que tú, pero trabajaré al revés ".

4. Malik le dio a Sapana esta ecuación de un círculo:

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0$$

   Ayuda a Sapana a encontrar el centro y la longitud del radio del círculo.

5. Sapana dijo, "Está bien. Hice una ecuación para ti. ¿Cuál es el centro y la longitud del radio de este círculo?

$$x^2 + y^2 + 6x - 14y - 42 = 0$$

6. Sapana dijo: "Todavía no sé por qué esta forma de la ecuación podría ser útil. Cuando teníamos formas diferentes para otras ecuaciones como líneas y parábolas, cada una de las diversas formas resaltaba las diferentes características de la relación. ¿Por qué podría ser útil esta forma de ecuación de un círculo?

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Hacer trinomios cuadrados perfectos

Encuentra el número que completa el cuadrado. Luego escribe el trinomio en forma factorizada.

1. $x^2 + 6x +$ ____________
2. $x^2 - 14x +$ ____________
3. $x^2 - 50x +$ ____________
4. $x^2 - 28x +$ ____________

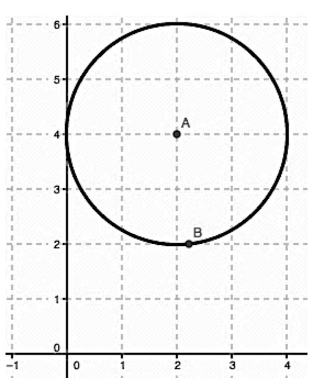
En el siguiente conjunto, deja el número que completa el cuadrado como una fracción. Luego escribe el trinomio en forma factorizada.

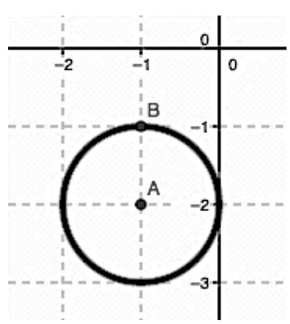
5. $x^2 - 11x +$ ____________
6. $x^2 + 7x +$ ____________
7. $x^2 + 15x +$ ____________
8. $x^2 + \frac{2}{3}x +$ ____________
9. $x^2 - \frac{1}{5}x +$ ____________
10. $x^2 - \frac{3}{4}x +$ ____________

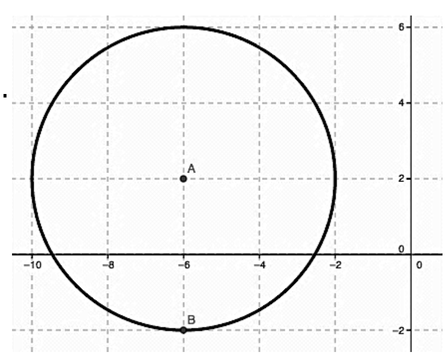
PRÁCTICA

Tema: Escritura de ecuaciones de círculos con centro (h, k) y radio *r*.

Escribe la ecuación de cada círculo.

11. 

12. 

13. 

Need help? Visit **www.rsgsupport.org**

Escribe la ecuación del círculo con el centro y el radio dados. Luego escríbela en forma expandida.

14. Centro: (5, 2) Radio: 13

15. Centro: (-6, -10) Radio: 9

16. Centro: (0, 8) Radio: 15

17. Centro: (19, -13) Radio: 1

18. Centro: (-1, 2) Radio: 10

19. Centro: (-3, -4) Radio: 8

RENDIMIENTO

Tema: Verificar si un punto es una solución

Identifica qué punto es una solución para la ecuación dada. Muestra tu trabajo.

20. $y=\frac{4}{5}x-2$ a. (-15, -14) b. (10, 10)

21. $y=3|x|$ a. (-4, -12) b. $\left(-\sqrt{5}, 3\sqrt{5}\right)$

22. $y=x^2+8$ a. $\left(\sqrt{7}, 15\right)$ b. $\left(\sqrt{7}, -1\right)$

23. $y=-4x^2+120$ a. $\left(5\sqrt{3}, -180\right)$ b. $\left(5\sqrt{3}, 40\right)$

24. $x^2+y^2=9$ a. $\left(8, -1\right)$ b. $\left(-2, \sqrt{5}\right)$

25. $4x^2-y^2=16$ a. $\left(-3, \sqrt{10}\right)$ b. $\left(-2\sqrt{2}, 4\right)$

8.3 Desafíos de Círculos

Actividad para Practicar Comprensión

Una vez que Malik y Sapana comenzaron a desafiarse entre sí con ecuaciones de círculos, se volvieron un poco más creativos con sus ideas. Ve si puedes resolver los desafíos que se dieron el uno al otro. Asegúrate de justificar todas tus respuestas.

1. El desafío de Malik:
   ¿Cuál es la ecuación del círculo con centro (-13, -16) y que contiene el punto (-10, -16) en el círculo?

2. El desafío de Sapana:

   Los puntos (0, 5) y (0, -5) son los puntos finales del diámetro de un círculo. El punto (3, y) está en el círculo. ¿Cuál es un valor de y?

3. El desafío de Malik:

   Encuentra la ecuación de un círculo con centro en el primer cuadrante y tangente a las líneas $x = 8$, $y = 3$, y $x = 14$.

4. El desafío de Sapana:

   Los puntos (4, -1) y (-6,7) son los puntos finales del diámetro de un círculo. ¿Cuál es la ecuación del círculo?

5. El desafío de Malik:

   ¿El punto (5,1) está dentro, afuera o en el círculo $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 24$? ¿Cómo lo sabes?

6. El desafío de Sapana:

   El círculo definido por $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 16$ se traslada 5 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia abajo. Escribe la ecuación del círculo resultante.

7. El desafío de Malik:

Hay dos círculos, el primero con centro (3,3) y el radio r_1, y el segundo, con centro (3, 1) y el radio r_2.

a. Encuentra los valores r_1 y r_2, de modo que el primer círculo esté completamente encerrado por el segundo círculo.

b. Encuentra un valor de r_1 y un valor de r_2 para que los dos círculos se crucen en dos puntos.

c. Encuentra un valor de r_1 y un valor de r_2 para que los dos círculos se crucen en exactamente un punto.

8.3

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO — Nombre — Periodo — Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Encontrar la distancia entre dos puntos

Simplificar. Usa la fórmula de distancia $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ **para encontrar la distancia entre los puntos dados. Deja tu respuesta en la forma radical más simple.**

1. $A(18,-12)\ B(10,4)$
2. $G(-11,-9)\ H(-3,7)$
3. $J(14,-20)\ K(5,5)$
4. $M(1,3)\ P(-2,7)$
5. $Q(8,2)\ R(3,7)$
6. $S(-11,2\sqrt{2})\ T(-5,-4\sqrt{2})$
7. $W(-12,-2\sqrt{2})\ Z(-7,-3\sqrt{2})$

PRÁCTICA

Tema: Escribir ecuaciones de círculos

Usa la información provista para escribir la ecuación del círculo en forma estándar

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h})^2=\boldsymbol{r}^2$$

8. Centro $(-16,-5)$ y la circunferencia es 22π
9. Centro $(13,-27)$ y el área es 196π
10. El diámetro mide 15 unidades y el centro está en la intersección de y = x + 7 e y = 2x – 5
11. Se encuentra en el cuadrante 2, tangente a *x = -12* y *x = -4*

12. Centro (-14 , 9) Punto en círculo (1 , 11)

13. El centro se encuentra en el eje *y*, tangente a *y = -2* e *y = -17*

14. Tres puntos en el círculo son $(-8,5),(3,-6),(14,5)$

15. Sé que tres puntos en el círculo son (-7,6), (9,6) y (-4,13). Creo que la ecuación del círculo es $(x-1)^2+(y-6)^2=64$. ¿Es esta la ecuación correcta para el círculo? Justifica tu respuesta.

RENDIMIENTO

Tema: Encontrar el valor de ***B*** en una ecuación cuadrática en la forma de Ax^2+Bx+C para crear un trinomio cuadrado perfecto.

Encuentra el valor de B que hará un trinomio cuadrado perfecto. Luego escribe el trinomio en forma factorizada.

16. $x^2 + \_\_\_\_\_ x + 36$

17. $x^2 + \_\_\_\_\_ x + 100$

18. $x^2 + \_\_\_\_\_ x + 225$

19. $9x^2 + \_\_\_\_\_ x + 225$

20. $16x^2 + \_\_\_\_\_ x + 169$

21. $x^2 + \_\_\_\_\_ x + 5$

22. $x^2 + \_\_\_\_\_ x + \frac{25}{4}$

23. $x^2 + \_\_\_\_\_ x + \frac{9}{4}$

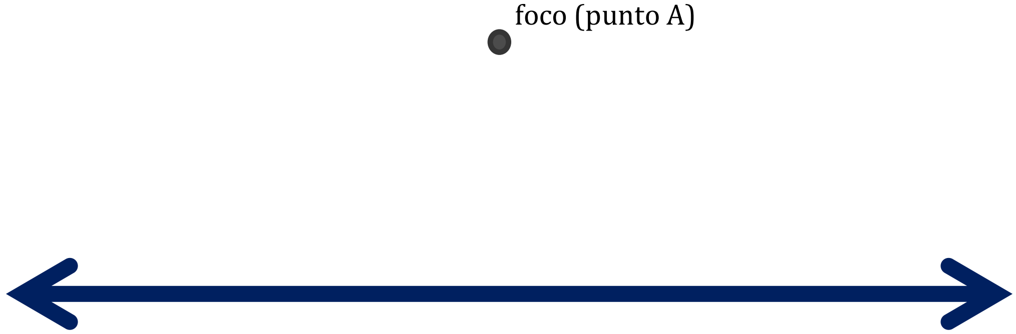
24. $x^2 + \_\_\_\_\_ x + \frac{49}{4}$

8.4 Dirigiendo nuestro Enfoque

CC BY Tim Waclawski
https://flic.kr/p/8FFLem

Actividad para Desarrollar Comprensión

En un pizarrón de tu salón de clase, tu maestra ha creado un punto y una línea como esta:

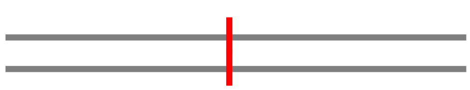


Vamos a llamar a la línea una directriz y al punto un foco. Han sido etiquetados en el dibujo.

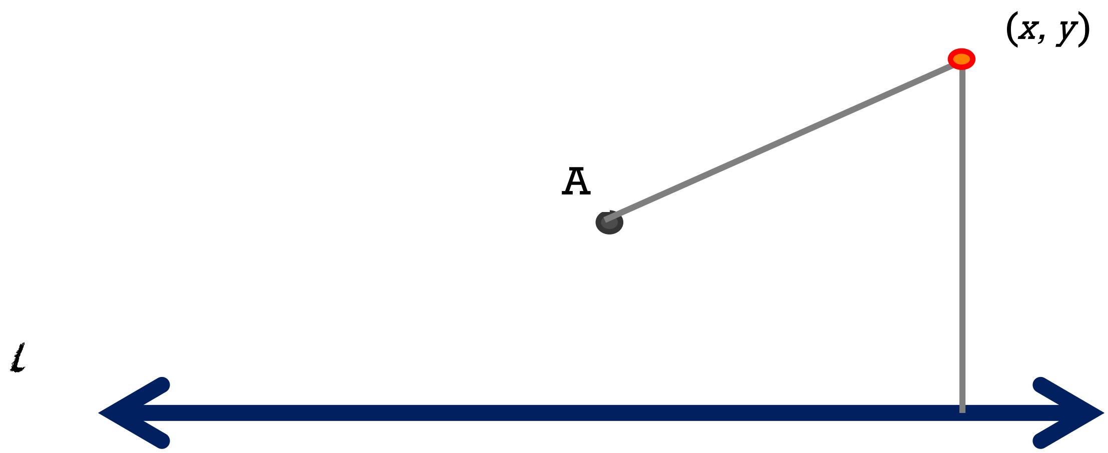
De forma similar a la tarea de círculos, la clase construirá una figura geométrica utilizando el foco (punto A) y la directriz (línea l).

1. Corta dos pedazos de hilo de la misma longitud.

2. Marca el punto medio de cada hilo con un marcador.



3. Coloca la cuerda en el tablero de manera que el punto medio sea equidistante del foco (punto A) y la directriz (línea l), lo que significa que debe ser perpendicular a la directriz. Mientras sostienes el hilo en esta posición, coloca un alfiler en el punto medio. Dependiendo del tamaño de tu hilo, se verá como esto:



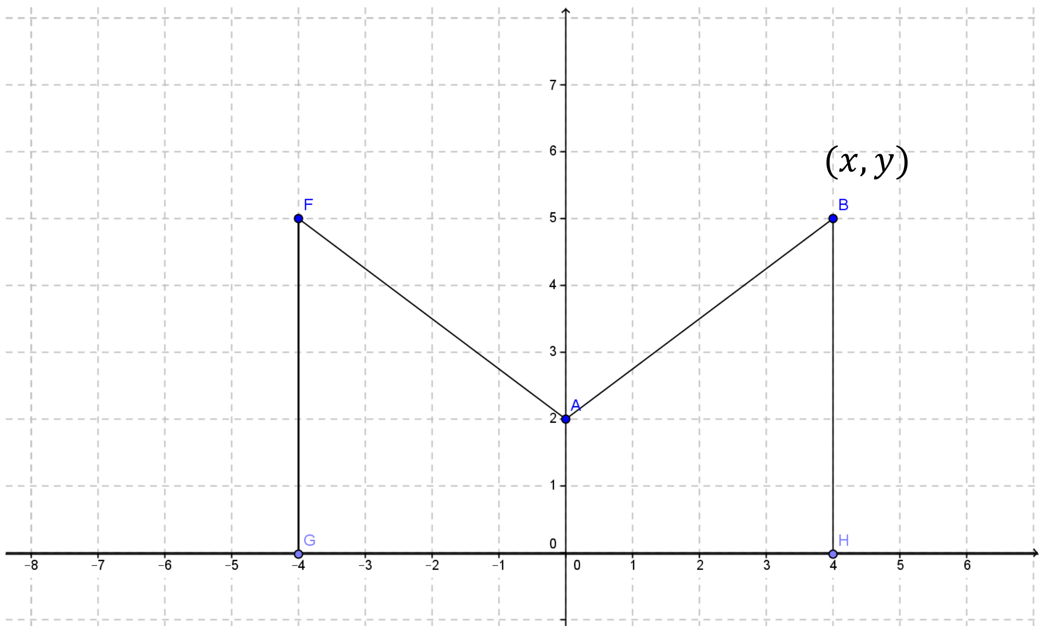
4. Usando tu segundo hilo, usa el mismo procedimiento para colocar un alfiler en el otro lado del foco.

5. A medida que tus compañeros de clase ponen sus hilos, ¿qué figura geométrica pronosticas será hecha con tachuelas (la colección de todos los puntos como (x, y) se muestra en la figura anterior)? ¿Por qué?

6. ¿Dónde se encuentra el vértice de la figura? ¿Cómo lo sabes?

7. ¿Dónde se encuentra la línea de simetría? ¿Cómo lo sabes?

8. Considera la siguiente construcción con el punto de foco A y el eje x como la directriz. Usa una regla para completar la construcción de la parábola de la misma manera que la clase construyó la parábola con hilo.



9. Acabas de construir una parábola basada en la definición: Una parábola es el conjunto de todos los puntos (x, y) equidistantes de una línea l (la directriz) y un punto que no está en la línea (el foco). Usa esta definición para escribir la ecuación de la parábola anterior, usando el punto (x, y) para representar cualquier punto en la parábola.

10. ¿Cómo cambiarías la parábola si el foco se moviera hacia arriba, lejos de la directriz?

11. ¿Cómo cambiaría la parábola si el foco se moviera hacia abajo, hacia la directriz?

12. ¿Cómo cambiaría la parábola si el foco se moviera hacia abajo, debajo de la directriz?

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

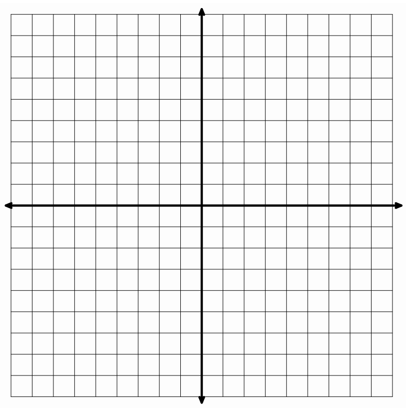
Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

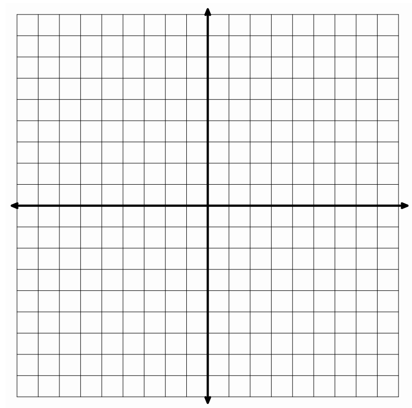
Tema: Graficar ecuaciones cuadráticas

Grafica cada conjunto de funciones en los mismos ejes de coordenadas. Describe de qué manera las gráficas son iguales y de qué manera son diferentes.

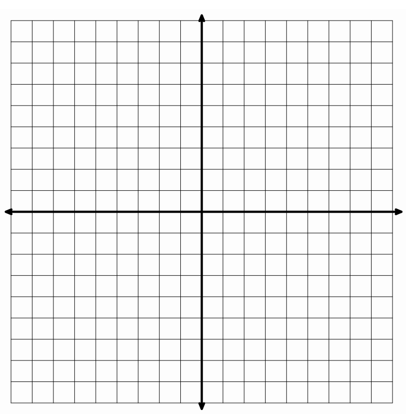
1. $y = x^2, y = 2x^2, y = 4x^2$



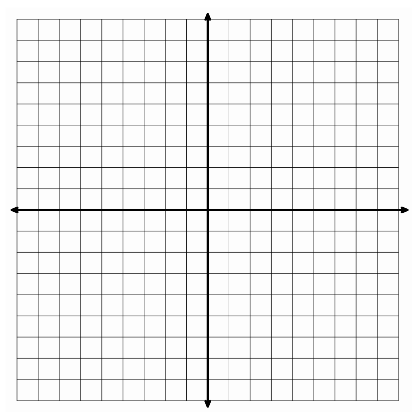
2. $y = \frac{1}{4}x^2, y = -x^2, y = -4x^2$



3. $y = \frac{1}{4}x^2, y = x^2 - 2, y = \frac{1}{4}x^2 - 2, y = 4x^2 - 2$



4. $y = x^2, y = -x^2, y = x^2 + 2, y = -x^2 + 2$



PRÁCTICA

Tema: Bosquejar una parábola usando la definición cónica

Usa la definición cónica de una parábola para dibujar una parábola definida por el foco *F* dado y la ecuación de la directriz.

Comienza por graficar el foco, la directriz y el punto P_1. Usa la fórmula de distancia para encontrar FP_1 y encuentra la distancia vertical entre P_1 y la directriz identificando el punto H en la directriz y contando la distancia. Ubica el punto P_2, (el punto en la parábola que es un reflejo de P_1 a través del eje de simetría). Localiza el vértice V. Como el vértice es un punto en la parábola, debe estar equidistante entre el foco y la directriz. Dibuja la parábola. Sugerencia: la parábola siempre "abraza" el foco.

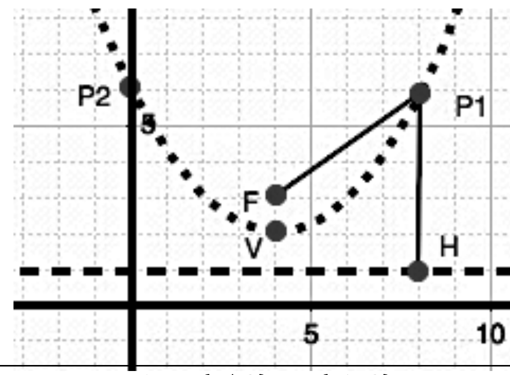
Ejemplo: ***F*** (4,3), $\boldsymbol{P_1}$ (8, 6), y = 1

$FP_1 = \sqrt{(4-8)^2+(3-6)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

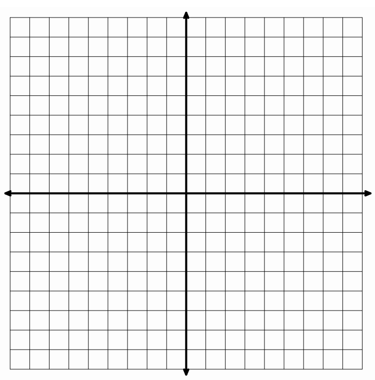
$P_1H = 5$

P_2 está localizado en (0, 6)

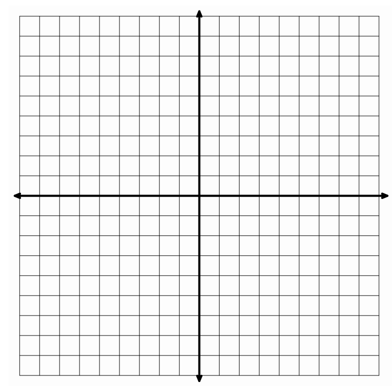
V está localizado en (4, 2)



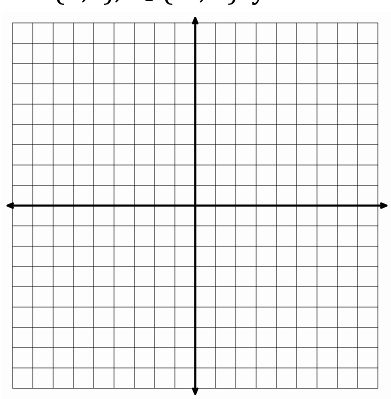
5. ***F*** (1,-1), $\boldsymbol{P_1}$ (3, -1) y = -3



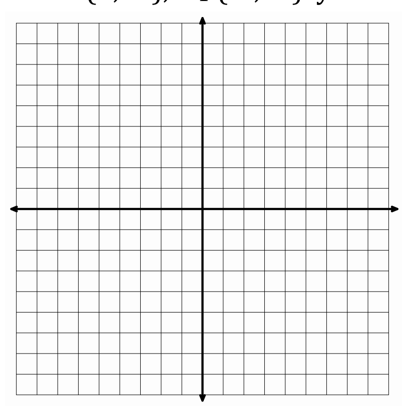
6. ***F*** (-5,3), $\boldsymbol{P_1}$ (-1, 3) y = 7



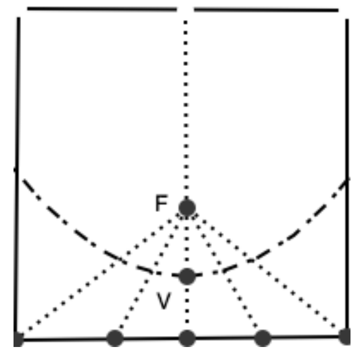
7. ***F*** (2,1), $\boldsymbol{P_1}$ (-2, 1) y =-3



8. ***F*** (1, -1), $\boldsymbol{P_1}$ (-9, -1) y = 9



Need help? Visit **www.rsgsupport.org**



9. Encuentra una hoja de papel cuadrada (una nota *post-it* funcionará). Dobla el cuadrado por la mitad verticalmente y pon un punto en cualquier lugar en el doblez. Deja que el borde del papel sea la directriz y el punto sea el foco. Dobla el borde del papel (la directriz) hasta el punto repetidamente desde diferentes puntos a lo largo del borde. Las líneas del doblez entre el foco y el borde deberían formar una parábola.

Experimenta con un nuevo documento y mueve el foco.
Usa tus experimentos para responder las siguientes preguntas.

10. ¿Cómo cambiaría la parábola si el foco se moviera hacia arriba, lejos de la directriz?

11. ¿Cómo cambiaría la parábola si el foco se moviera hacia abajo, hacia la directriz?

12. ¿Cómo cambiaría la parábola si el foco se moviera hacia abajo, debajo de la directriz?

RENDIMIENTO

Tema: Encontrar el centro y el radio de un círculo
Escribe cada ecuación para que muestre el centro (h, k) y el radio r del círculo. Esto se llama la forma estándar de un círculo $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

13. $x^2+y^2+4y-12=0$

14. $x^2+y^2-6x-3=0$

15. $x^2+y^2+8x+4y-5=0$

16. $x^2+y^2-6x-10y-2=0$

17. $x^2+y^2-6y-7=0$

18. $x^2+y^2-4x+8y+6=0$

19. $x^2+y^2-4x+6y-72=0$

20. $x^2+y^2+12x+6y-59=0$

21. $x^2+y^2-2x+10y+21=0$

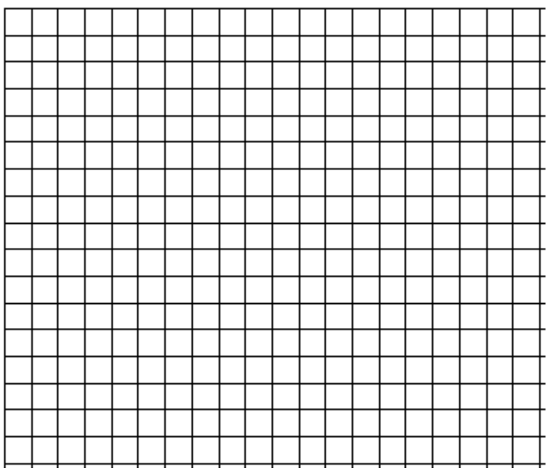
22. $4x^2+4y^2+4x-4y-1=0$

8.5 Funcionando con Parábolas

Actividad para Consolidar Comprensión

Dibuja la gráfica de cada parábola (con precisión), encuentra el vértice y usa la definición geométrica de una parábola para encontrar la ecuación de estas parábolas.

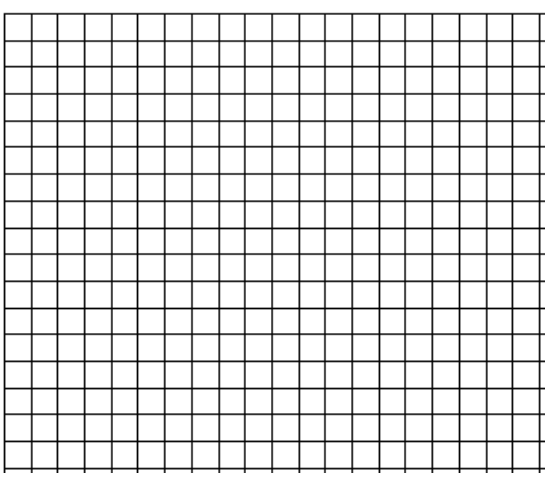
1. Directriz $y = -4$, Foco A(2, -2)



Vértice ________________

Ecuación:

2. Directriz $y = 2$, Foco A(-1, 0)



Vértice ________________

Ecuación:

3. Directriz $y = 3$, Foco A$(1, 7)$

Vértice ________________

Ecuación:

4. Directriz $y = 3$, Foco A$(2, -1)$

Vértice ________________

Ecuación:

5. Dado el foco y la directriz, ¿cómo puedes encontrar el vértice de la parábola?

6. Dado el foco y la directriz, ¿cómo puedes saber si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo?

7. ¿Cómo ves la distancia entre el foco y el vértice (o el vértice y la directriz) en las ecuaciones que has escrito?

8. Describe un patrón para escribir la ecuación de una parábola dado el foco y la directriz.

9. Annika se pregunta por qué repentinamente estamos pensando en parábolas de una manera completamente diferente que cuando hacíamos funciones cuadráticas. Ella se pregunta cómo encajan estas diferentes formas de pensar. Por ejemplo, cuando hablamos de funciones cuadráticas anteriormente, comenzamos con $y = x^2$. "Mmm... Me pregunto dónde estarán el foco y la directriz en esta función ", pensó. Ayuda a Annika a encontrar el foco y la directriz para $y = x^2$.

10. Annika piensa: "Está bien, puedo ver que puedes encontrar el foco y la directriz para una función cuadrática, pero ¿qué hay de estas nuevas parábolas? ¿Son funciones cuadráticas? Cuando trabajamos con familias de funciones, se definen por sus tasas de cambio. Por ejemplo, podemos decir que una función es lineal porque tiene una tasa constante de cambio. "¿Cómo responderías a Annika? ¿Son estas nuevas parábolas funciones cuadráticas? Justifica tu respuesta usando varias representaciones y las parábolas en los problemas 1-4 como ejemplos.

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Forma estándar de una ecuación cuadrática

Verifica que el punto dado se encuentre en la gráfica de la parábola descrita por la ecuación. (Muestra tu trabajo.)

1. $(6,0)\ \ y=2x^2-9x-18$
2. $(-2,49)\ \ y=25x^2+30x+9$
3. $(5,53)\ \ y=3x^2-4x-2$
4. $(8,2)\ \ y=\frac{1}{4}x^2-x-6$

PRÁCTICA

Tema: Ecuación de la parábola basada en la definición geométrica

5. Verifica que $(y-1)=\frac{1}{4}x^2$ sea la ecuación de la parábola en la *Figura 1* conectando los 3 puntos V (0,1), C (4,5) y E (2,2). ¡Muestra tu trabajo para cada punto!

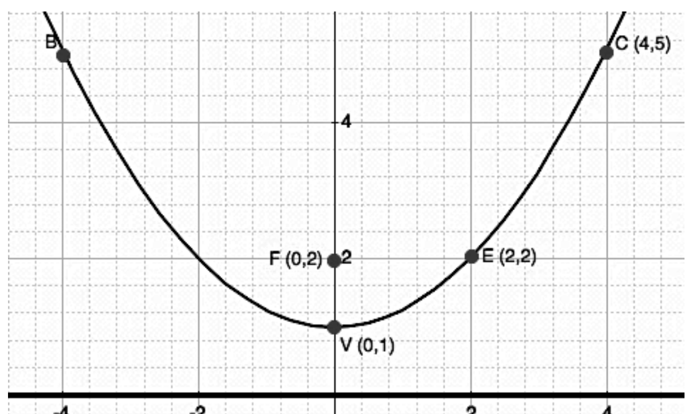
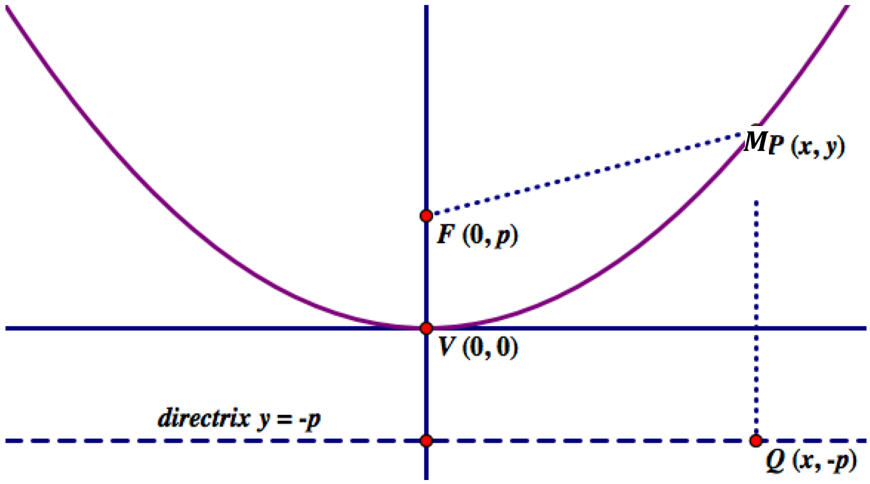


Figure 1

6. Si no sabías que (0,1) era el vértice de la parábola, ¿podrías haberlo encontrado simplemente mirando la ecuación? Explica.

7. Usa el diagrama de la *Figura 2* para derivar la ecuación general de una parábola basada en la **definición geométrica** de una parábola. Recuerda que la definición establece que MF = MQ.

Figura 2

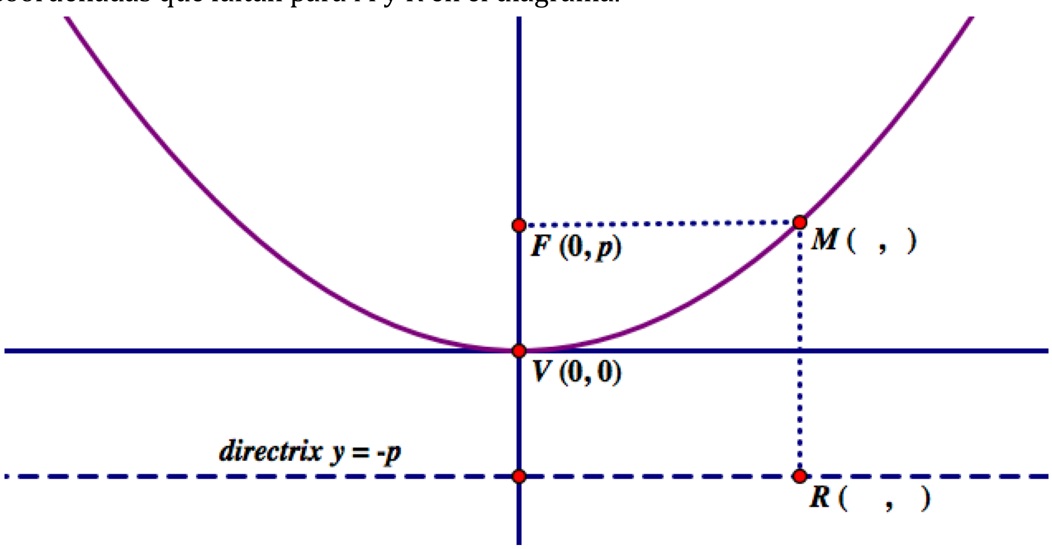


8. Recuerda la ecuación en # 5, $(y-1)=\frac{1}{4}x^2$ ¿cuál es el valor de ***p***?

9. En general, ¿cuál es el valor de ***p*** para cualquier parábola?

10. En la *Figura* 3, el punto M tiene la misma altura que el foco y $\overline{FM} \cong \overline{MR}$. ¿Cómo se comparan las coordenadas de este punto con las coordenadas del foco?
Completa las coordenadas que faltan para M y R en el diagrama.

Figura 3



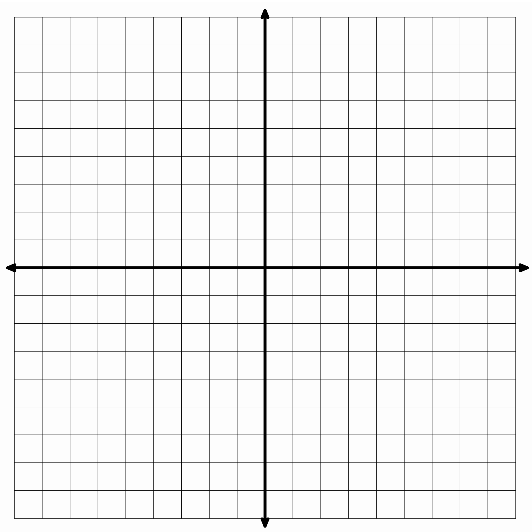
Need help? Visit **www.rsgsupport.org**

8.5

Dibuja la gráfica encontrando el vértice y el punto M y R (la reflexión de M) como se define en el diagrama anterior. Usa la definición geométrica de una parábola para encontrar la ecuación de estas parábolas.

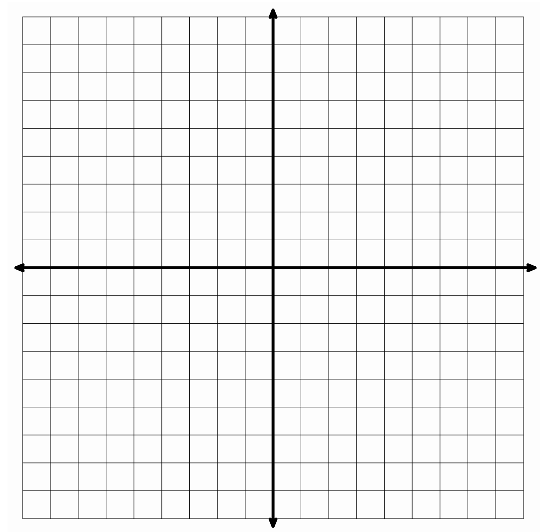
11. Directriz $y = 9$, Foco $F(-3, 7)$

Vértice ___________
Ecuación ________________________________



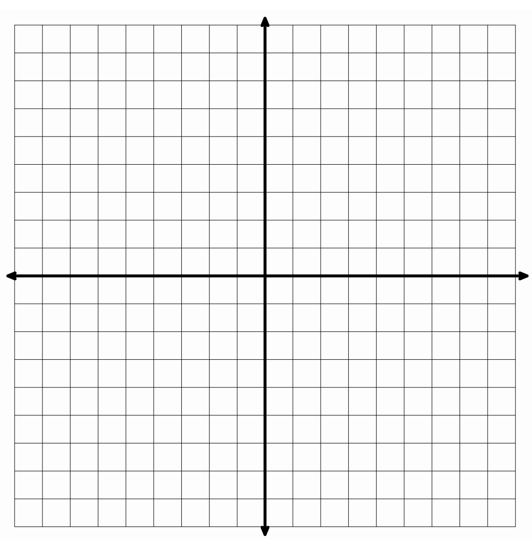
12. Directriz $y = -6$, Foco $F(2, -2)$

Vértice ___________
Ecuación ________________________________



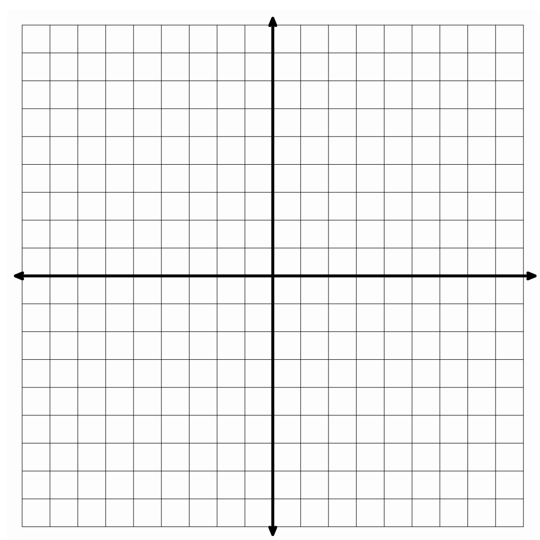
13. Directriz $y = 5$, Foco $F(-4, -1)$

Vértice ___________
Ecuación ________________________________



14. Directriz $y = -1$, Foco $F(4, -3)$

Vértice ___________
Ecuación ________________________________



Need help? Visit **www.rsgsupport.org**

RENDIMIENTO

Tema: Encontrar valores máximos y mínimos para ecuaciones cuadráticas

Encuentra el valor máximo o mínimo de la ecuación cuadrática. Indica cuál es.

15. $y = x^2 + 6x - 5$

16. $y = 3x^2 - 12x + 8$

17. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 10x + 13$

18. $y = -5x^2 + 20x - 11$

19. $y = \frac{7}{2}x^2 - 21x - 3$

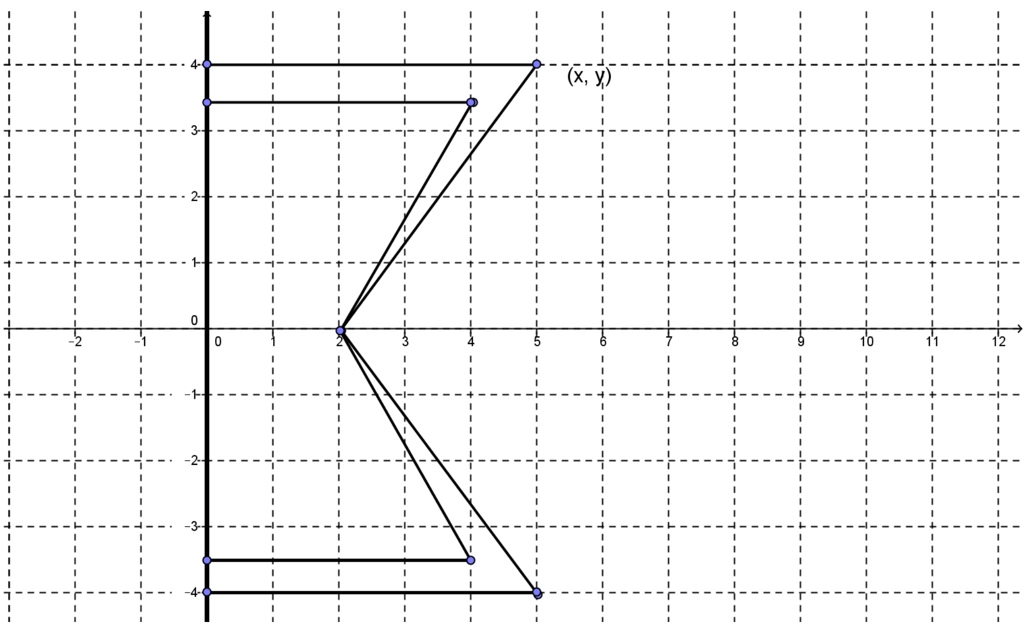
20. $y = -\frac{3}{2}x^2 + 9x + 25$

8.6 Voltéalo

CC BY Mridul Tantia
https://flic.kr/p/77zqGh

Actividad para Consolidar Comprensión

Annika está pensando más en la vista geométrica de las parábolas en las que ha estado trabajando en la clase de matemáticas. Ella piensa: "Ahora veo cómo todas las parábolas que provienen de las funciones gráficas cuadráticas también pueden provenir de un foco y una directriz determinados. Noto que todas las parábolas se han abierto hacia arriba o hacia abajo cuando la directriz es horizontal. Me pregunto qué pasaría si girara el foco y la directriz 90 grados para que la directriz sea vertical. ¿Cómo se vería eso? ¿Cuál sería la ecuación? Mmm... "Entonces Annika comienza a tratar de construir una parábola con una directriz vertical. Aquí está el comienzo de su dibujo. Usa una regla para completar el dibujo de Annika.



1. Usa la definición de una parábola para escribir la ecuación de la parábola de Annika.

2. ¿Qué similitudes ves con las ecuaciones de las parábolas que se abren hacia arriba o hacia abajo? ¿Qué diferencias ves?

3. Prueba con otra: escribe la ecuación de la parábola con directriz x = 4 y foco (0, 3).

4. Una más: escribe la ecuación de la parábola con directriz x = -3 y foco $(-2, -5)$.

5. ¿Cómo puedes predecir si una parábola se abrirá a la izquierda, derecha, arriba o abajo?

6. ¿Cómo puedes saber qué tan ancha o estrecha es una parábola?

7. A Annika le quedan dos grandes preguntas. Escribe y explica tus respuestas a estas preguntas.
    a. ¿Son todas las parábolas funciones?

    b. ¿Son todas las parábolas similares?

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Revisión de círculos

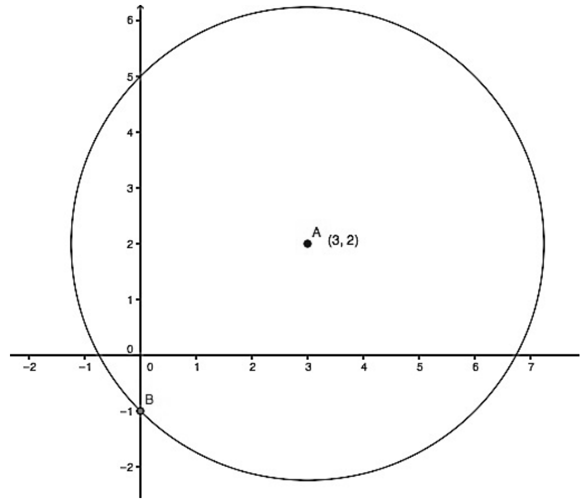
Usa la información dada para escribir la ecuación del círculo en forma estándar.

1. Centro: (-5, -8) , Radio: 11

2. Puntos finales del diámetro: (6, 0) y (2, -4)

3. Centro (-5, 4) : Punto en el círculo (-9, 1)

4. Ecuación del círculo en el diagrama a la derecha.

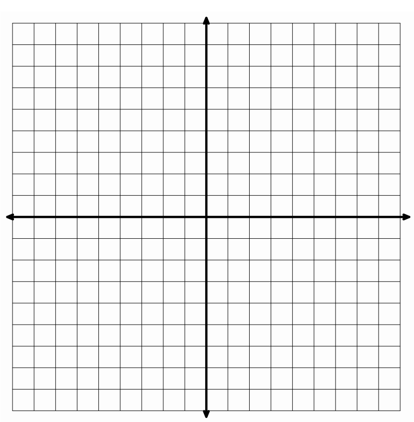


PRÁCTICA

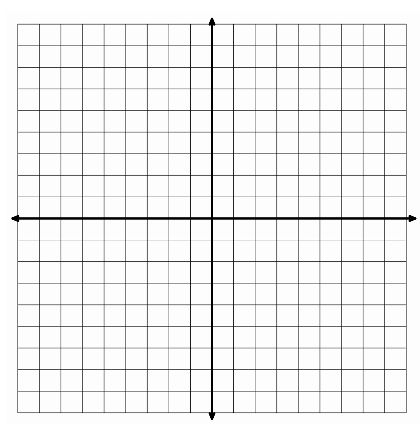
Tema: Escritura de ecuaciones de parábolas horizontales

Usa el foco F, el punto M, un punto en la parábola y la ecuación de la directriz para dibujar la parábola (etiqueta tus puntos) y escribe la ecuación. Pon tu ecuación en la forma $\boldsymbol{x = \frac{1}{4p}(y-k)^2 + h}$ donde "p" es la distancia desde el foco al vértice.

5. $\boldsymbol{F}$ (1,0), $\boldsymbol{M}$ (1,4) x = -3

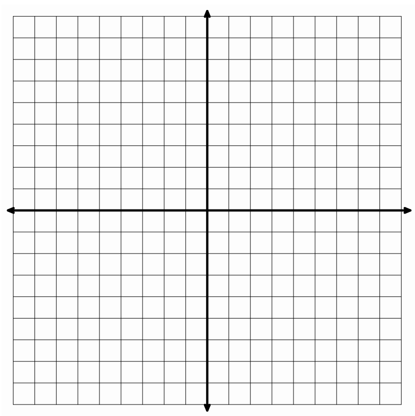


6. $\boldsymbol{F}$ (3,1), $\boldsymbol{M}$ (3,-5) x = 9

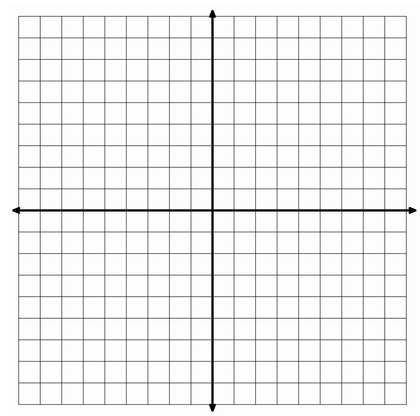


Need help? Visit **www.rsgsupport.org**

7. ***F*** (7,-5), ***M*** (4,-1)   x = 9



8. ***F*** (-1,2), ***M*** (6,-9)   x = -7



RENDIMIENTO

Tema: Identificación de las características clave de una ecuación cuadrática escrita en forma de vértice

Indica (a) las coordenadas del vértice, (b) la ecuación del eje de simetría, (c) el dominio y (d) el rango para cada una de las siguientes funciones.

9. $f(x) = (x-3)^2 + 5$

10. $f(x) = (x+1)^2 - 2$

11. $f(x) = -(x-3)^2 - 7$

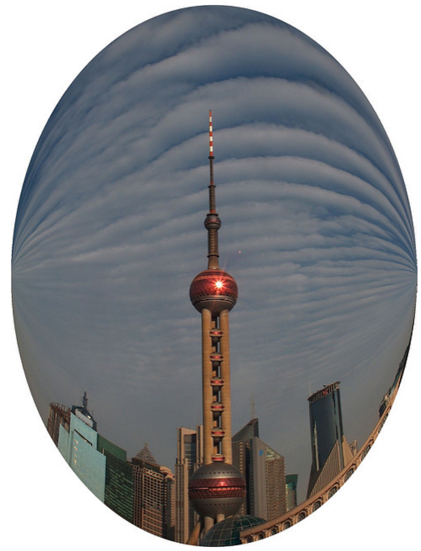
12. $f(x) = -3\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{4}{5}$

13. $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 1$

14. $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 4$

15. Compara la forma del vértice de una ecuación cuadrática con la definición geométrica de una parábola basada en el foco y la directriz. Describe cómo son similares y cómo son diferentes.

8.7H Operando con recursos limitados

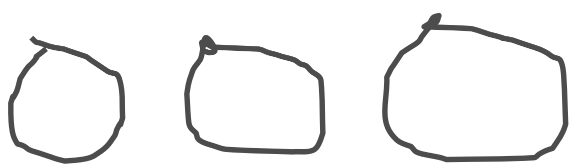


CC BY fdecomite https://flic.kr/p/3dxHJ5

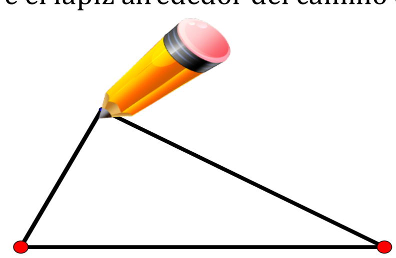
Actividad para Consolidar Comprensión

Necesitarás 3 pedazos de papel, un pedazo de cartón de al menos 8 "x 8", 2 tachuelas, 36 pulgadas de hilo y un lápiz.

1. Corta tres pedazos de hilo: una pieza de 10 pulgadas, una pieza de 12 pulgadas y una pieza de 14 pulgadas. Ata los extremos de cada hilo, haciendo 3 lazos (como se muestra a continuación).



2. Coloque un pedazo de papel sobre el cartón.
3. Coloca las dos tachuelas a 4 pulgadas de distancia, enrolla el hilo alrededor de las tachuelas y luego presiona las tachuelas hacia abajo.
4. Jala el hilo apretado entre las dos tachuelas y mantenlo apretado entre tu dedo y tu pulgar. Tira del hilo para que forme un triángulo, como se muestra a continuación. ¿Cuál es la longitud de la parte del hilo que no está en el segmento entre las dos tachuelas, la suma de las longitudes de los segmentos marcados d1 y d2 en el diagrama?
5. Con el lápiz en el lazo y el hilo apretado, mueve el lápiz alrededor del camino que mantiene apretado el hilo.



6. ¿Qué figura se forma? ¿Qué características geométricas de la figura observas?

7. Repite el proceso nuevamente usando los otros hilos. ¿Cuál es el efecto de la longitud del hilo?

8. ¿Cuál es el efecto de cambiar la distancia entre las dos tachuelas? (Puede que tengas que experimentar para encontrar esta respuesta).

La figura geométrica que has creado se llama elipse. Las dos tachuelas representan cada una un punto de enfoque para la elipse. (El plural de la palabra "foco" es "focos", pero "enfoques" también es correcto).

Para enfocar nuestras observaciones sobre la elipse, vamos a hacer el proceso más lento y mirar los puntos en la elipse en posiciones particulares. Para ayudar a que el etiquetado sea más fácil, colocaremos la elipse en el plano de coordenadas.

9. Las distancias desde el punto en la elipse a cada uno de los dos focos se denominan d1 y d2.

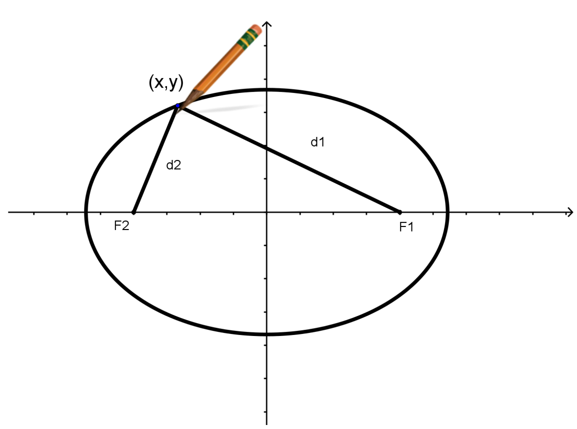


Figura 1

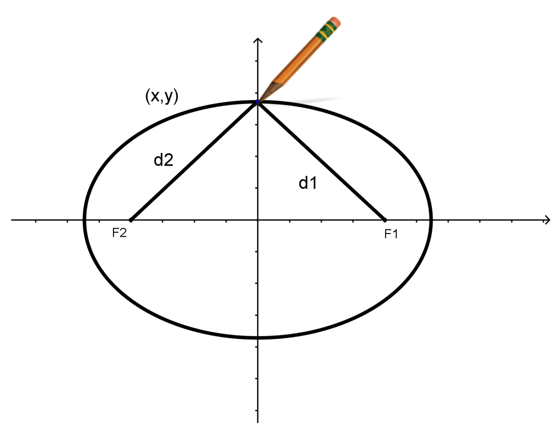
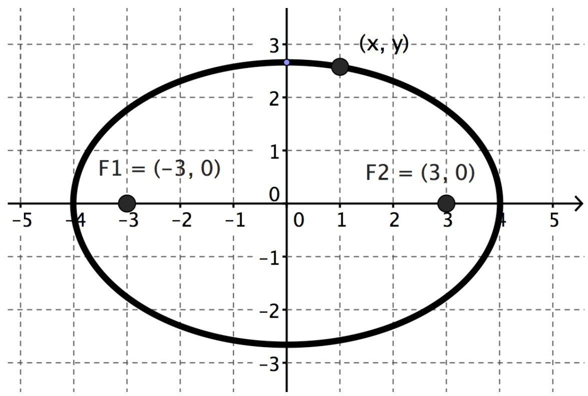


Figura 2

¿Cómo se compara d1 + d2 en la Figura 1 con d1 + d2 en la Figura 2? (La Figura 1 y la Figura 2 son la misma elipse).

10. ¿Cómo se compara d1 + d2 con la longitud de la elipse, medida de un extremo al otro a lo largo del eje *x*? Explica tu respuesta con un diagrama.

Acabas de construir una elipse basada en la definición: una elipse es el conjunto de todos los puntos *(x, y)* en un plano que tiene la misma distancia total desde dos puntos fijos llamados focos. Al igual que los círculos y las parábolas, las elipses también tienen ecuaciones. La ecuación básica de la elipse se deriva de una manera similar a la ecuación de una parábola o un círculo. Como generalmente es más fácil comenzar con un caso específico y luego generalizar, comenzaremos con esta elipse:



11. Ahora, usa las conclusiones que sacaste antes para ayudarte a escribir una ecuación. (Ayudaremos con algunas indicaciones).
    a. ¿Cuál es la suma de las distancias de un punto (x, y) en esta elipse para F1 y F2?

    b. Escribe una expresión para la distancia entre el punto (x, y) en la elipse y F1 (-3,0).

    c. Escribe una expresión para la distancia entre (x, y) en la elipse y F2 (3,0).

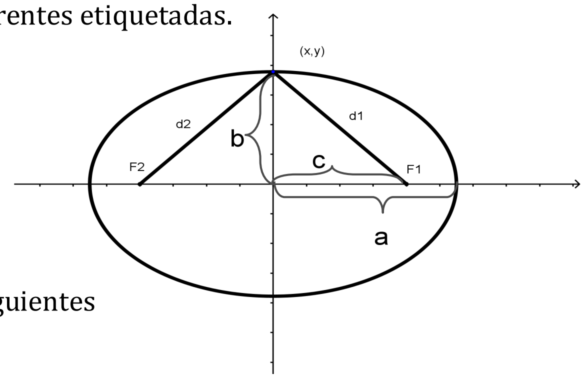
    d. Usa tus respuestas para a, b, y c para escribir una ecuación.

12. La ecuación de esta elipse en forma estándar es:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$$

Puede ser mucho más complicado de lo que imaginas reorganizar tu ecuación para verificarla, por lo que intentaremos una estrategia diferente. Esta ecuación diría que la elipse contiene los puntos $(4,0)$ y $(0,-\sqrt{7})$. ¿Ambos puntos hacen que tu ecuación sea verdadera? Muestra cómo los verificaste aquí.

13. Usar la forma estándar de la ecuación es bastante fácil, pero debes notar algunas relaciones más. Aquí hay otra imagen con algunas partes diferentes etiquetadas.



a = distancia horizontal desde el centro a la elipse

b = distancia vertical desde el centro a la elipse

c = distancia del centro a un foco

Basado en el diagrama, describe en palabras las siguientes expresiones:

2a

2b

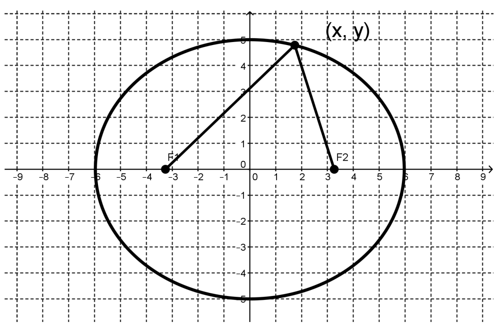
2c

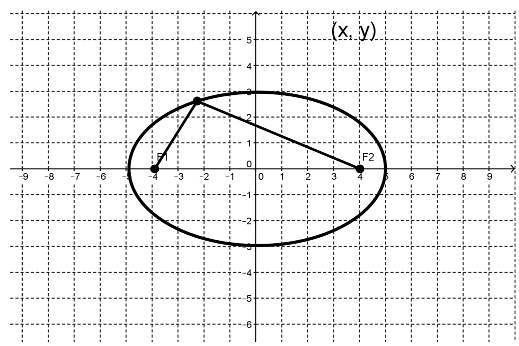
14. ¿Cuál es la relación matemática entre a, b y c?

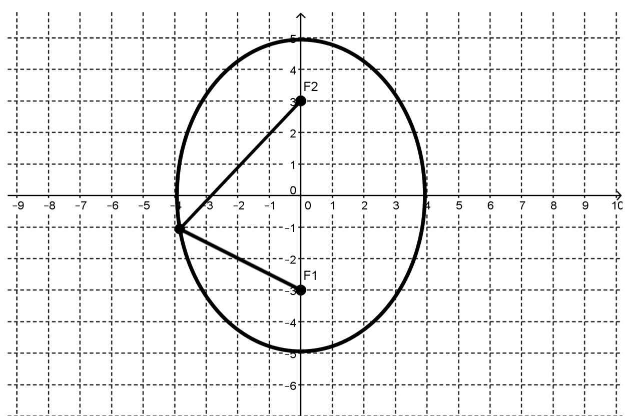
15. Ahora puedes usar la forma estándar de la ecuación de una elipse centrada en (0,0) que es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

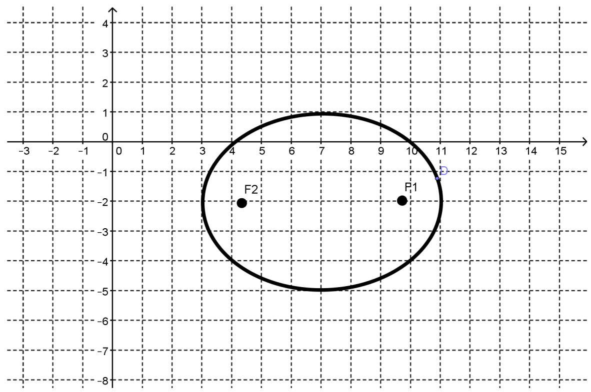
Escribe la ecuación de cada una de las elipses que se muestran a continuación:







16. En base a tu experiencia con círculos y parábolas cambiantes que se alejan del origen, escribe una ecuación para esta elipse. Pon a prueba tu ecuación con algunos puntos en la elipse que puedas identificar.



8.7H

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Resolver ecuaciones radicales

Resuelve para x. Cuidado con las soluciones extrañas.

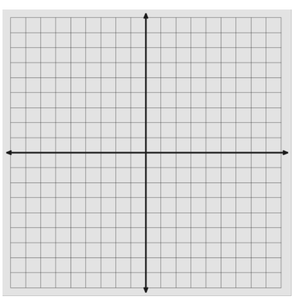
1. $\sqrt{2x-5}=3$
2. $\sqrt{10x+9}=13$
3. $\sqrt{2x}=x-4$
4. $3\sqrt{2x+2}=2\sqrt{5x-1}$
5. $x-3=\sqrt{3x+1}$
6. $4-\sqrt{10-3x}$ = x

PRÁCTICA

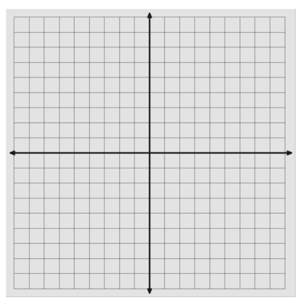
Tema: Graficar elipses

Encuentra las intersecciones *x* e *y* de la elipse cuya ecuación se da. Luego dibuja la gráfica.

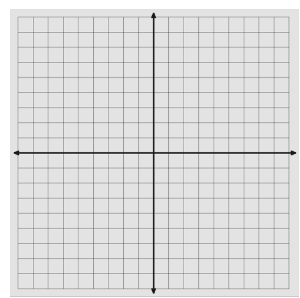
7. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$



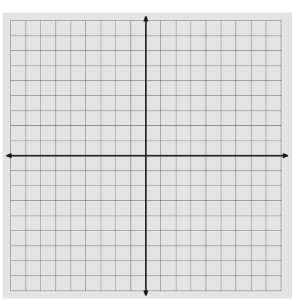
8. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{64}=1$



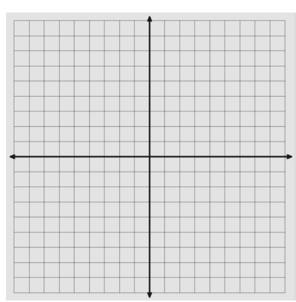
9. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$



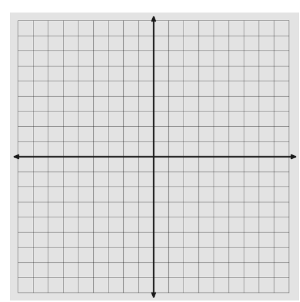
10. $x^2+4y^2=64$



11. $9x^2+y^2=36$



12. $x^2+3y^2=75$



Need help? Visit **www.rsgsupport.org**

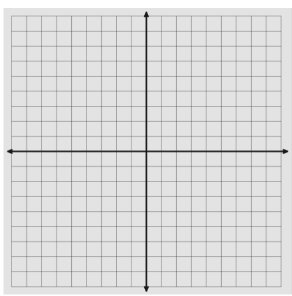
No todas las elipses están centradas en el origen. Una elipse con centro (h, k) se traslada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente. La forma estándar de la ecuación de una elipse con centro en C (h, k) y cuyos vértices son horizontal y verticalmente $\pm$a y $\pm$b, respectivamente es $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$.

Escribe una ecuación, en forma estándar, para cada elipse basada en el centro C dado y son los valores dados para el radio horizontal, *a*, y el radio vertical, *b*.

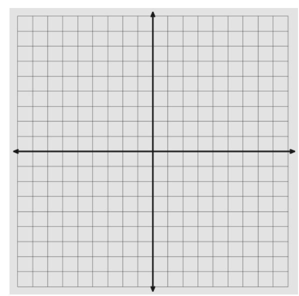
13. C (-2,3), a = ±4, b = ± 2
14. C (5,2), a = ±3, b = ± 5
15. C (-4,-7), a = ±10, b = ± 8
16. C (6,-5), a = ±7, b = ± $\sqrt{11}$

Escribe la ecuación de cada elipse en forma estándar. Identifica el centro. Luego grafica la elipse.

17. $4x^2+y^2-32x-4y+52=0$



18. $16x^2+9y^2-96x+72y+144=0$



RENDIMIENTO

Tema: forma de punto-pendiente de una línea

El rectángulo en la figura B es una traslación del rectángulo en la figura A. Escribe las ecuaciones de las 2 diagonales del rectángulo ABCD en forma punto-pendiente. Luego escribe las ecuaciones de las 2 diagonales de A'B'C'D'.

19. *figura* A

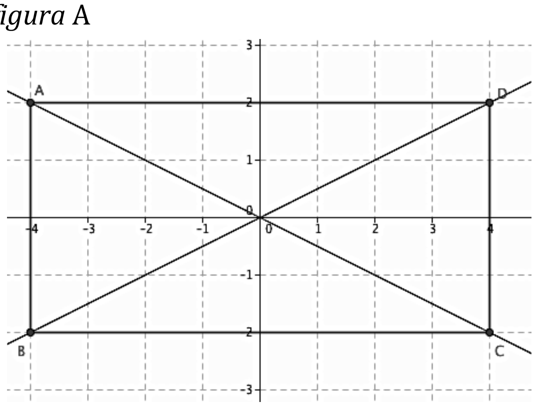
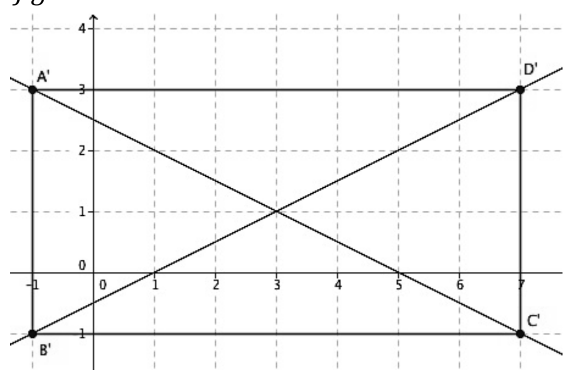


figura B



Need help? Visit **www.rsgsupport.org**

20. *figura* A

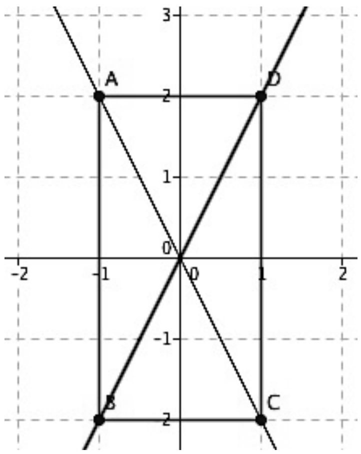
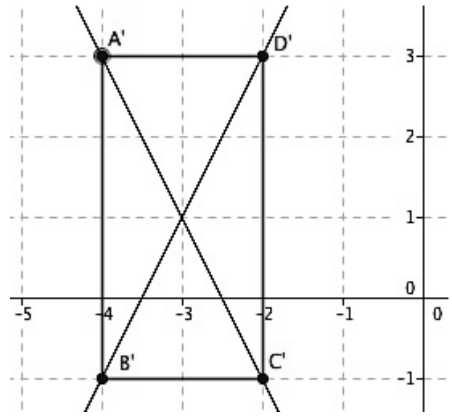


figura B



21. *figura* A

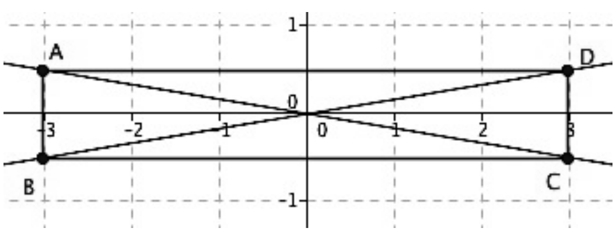
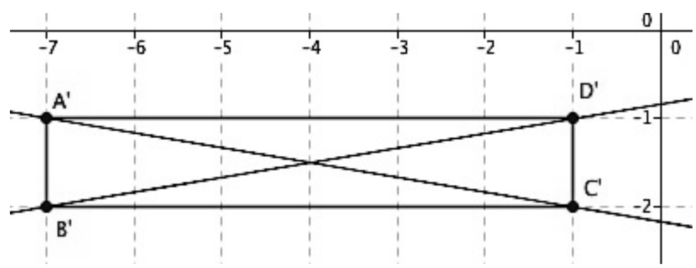
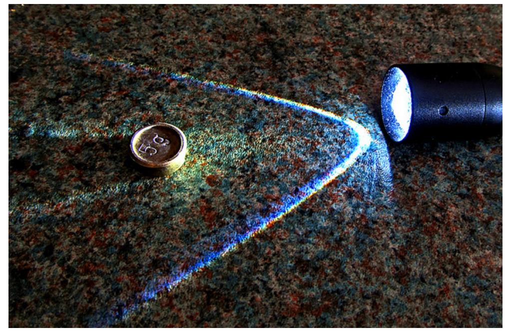


figura B



22. Las ecuaciones de las diagonales del rectángulo JKLM son $y_1 = \frac{5}{8}x$ y $y_2 = -\frac{5}{8}x$.
El rectángulo JKLM se traslada entonces para que sus diagonales se crucen en el punto (12, -9).
Escribe la ecuación de las diagonales del rectángulo trasladado.

8.8H ¿Qué pasa si?...



CC BY Andrew Gustar
https://flic.kr/p/cd9nmy

Actividad para Consolidar Comprensión

Después de pasar un tiempo trabajando con círculos y elipses, Maya nota que las ecuaciones son muy parecidas. Por ejemplo, aquí hay una ecuación de una elipse y un círculo:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad x^2+y^2=16$$

1. ¿Cuáles son algunas de las similitudes entre el círculo y la elipse que se dan en las ecuaciones anteriores? ¿Cuáles son algunas de las diferencias?

2. Maya se pregunta qué pasaría si tomara la ecuación del círculo y la reorganizara, de modo que el lado derecho fuera 1, como la forma estándar de una elipse. ¿En qué se convierte la ecuación del círculo?

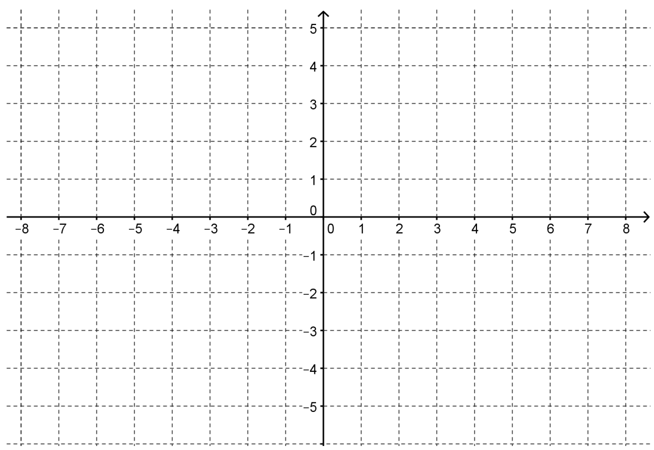
3. Después de ver esta ecuación, Maya se pregunta si un círculo es realmente una elipse, o si una elipse es realmente un círculo. ¿Cómo responderías esta pregunta?

4. Maya mira la ecuación de la elipse y se pregunta qué pasaría si el "+" en la ecuación fuera reemplazado por "—", haciendo la ecuación:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Sin hacer más cálculos ni graficar ningún punto, predice si la gráfica de esta ecuación será o no elipse. Usando lo que sabes sobre elipses, explica tu respuesta.

5. Grafica la ecuación para determinar si tu predicción fue correcta o no. Asegúrate de usar suficientes puntos para obtener una imagen completa de la figura.

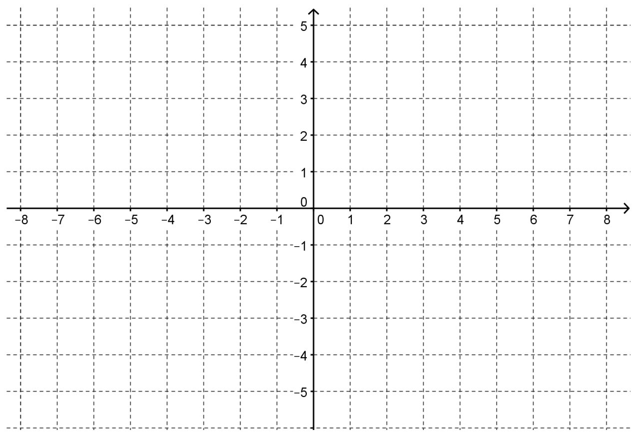


6. ¿Cuáles son algunas de las características de la figura que has graficado?

7. La maestra de Maya le dice que el nombre de la figura representada en este nuevo tipo de ecuación es una hipérbola. Maya se pregunta qué pasaría si el término x^2 en la ecuación cambiara con el término y^2, haciendo la ecuación:

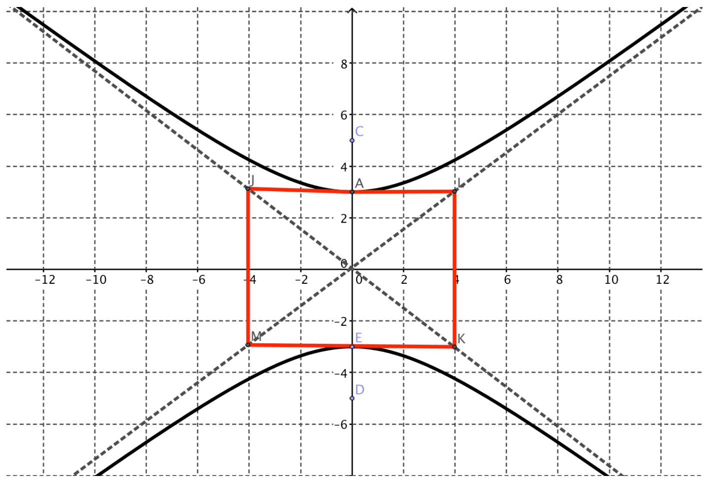
$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

Grafica esta ecuación y compárala con la hipérbola que graficaste previamente.



8. ¿Qué similitudes y diferencias ves entre esta hipérbola y la que graficaste en el #5?

Una estrategia que hace más fácil graficar la hipérbola de una ecuación es notar que la raíz cuadrada de los números bajo los términos x^2 y y^2 se puede usar para hacer un rectángulo y luego dibujar líneas punteadas a través de las diagonales que forman los límites de la hipérbola. Usando esta estrategia para graficar la ecuación: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$, comenzarías tomando la raíz cuadrada de 9, que es 3 y subiendo y bajando 3 unidades desde el origen. Luego tomas la raíz cuadrada de 16, que es 4 y vas a la izquierda y derecha 4 unidades desde el origen. Haz un rectángulo con estos puntos en los lados y dibuja las diagonales. Obtendrás esto:



9. Entonces, Maya, la audaz aventurera matemática, decide intentarlo con una nueva ecuación de hipérbola. La forma estándar de la ecuación de una hipérbola centrada en (0,0) es:

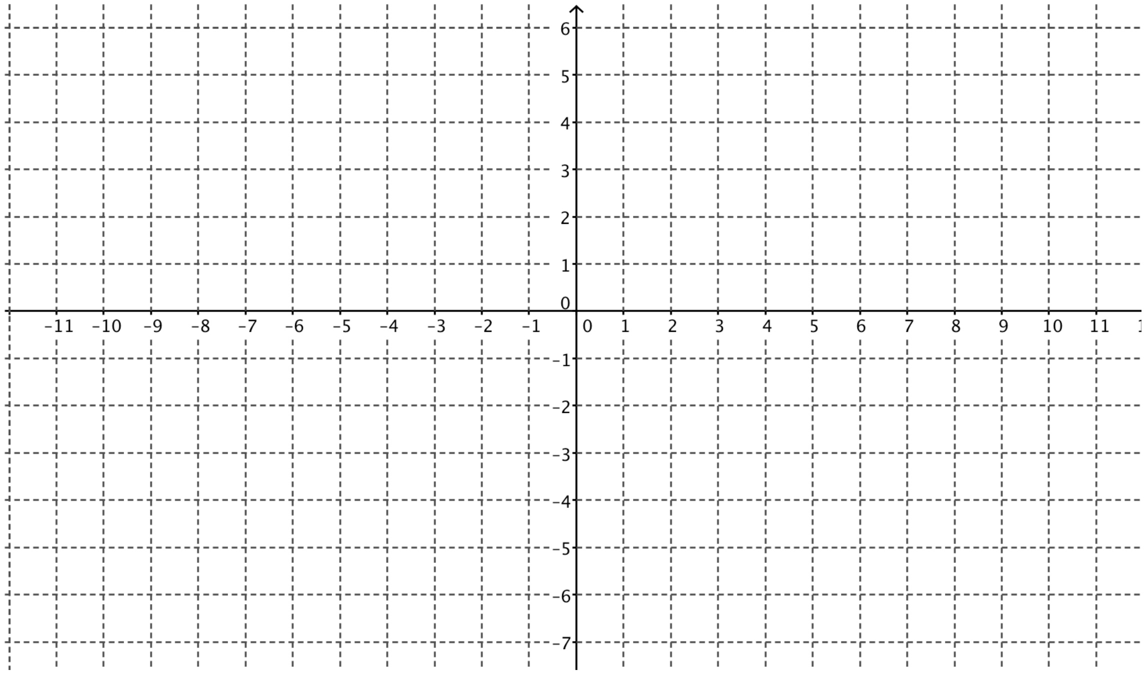
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (abre a la izquierda y a la derecha)}$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ (abre hacia arriba y hacia abajo)}$$

Maya trabaja en graficar la ecuación:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$$

Pruébala tu mismo en la gráfica que sigue y ve qué se te ocurre.

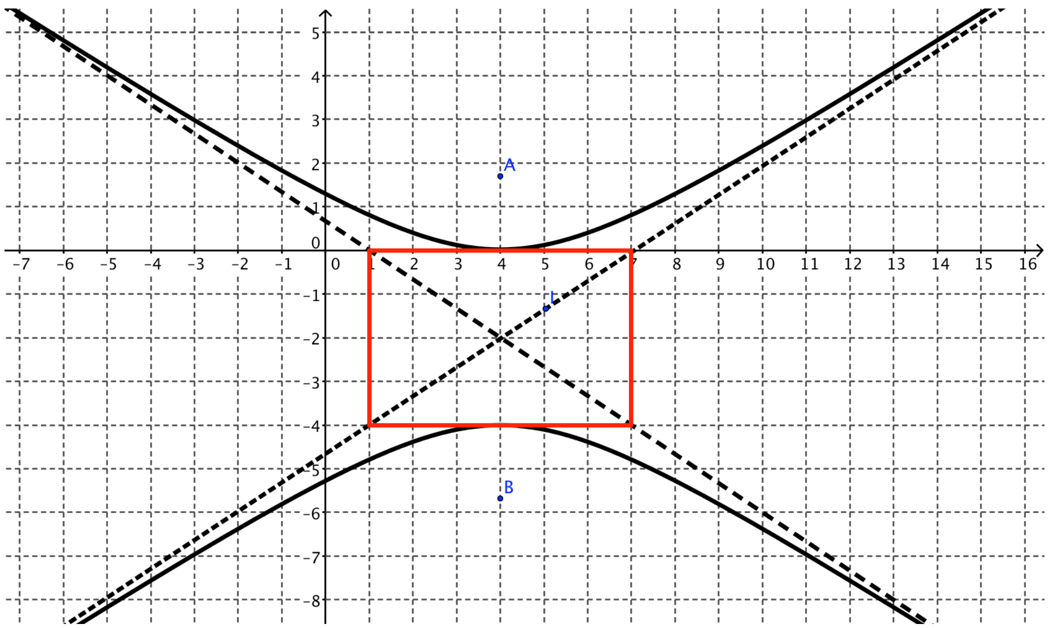


10. Maya se pregunta qué sucede si la ecuación se convierte en:

$$\frac{(x-1)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

¿Cuál es tu predicción? ¿Por qué?

11. Escribe la ecuación de la hipérbola que se muestra a continuación:



12. ¿Qué similitudes y diferencias ves entre una hipérbola y una elipse?

8.8H

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Identificación de las secciones cónicas por sus ecuaciones

Identifica cada sección cónica por la ecuación dada.

1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{12}=1$

2. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$

3. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{49}=1$

4. $x^2=16+y$

5. $9x^2=36+4y^2$

6. $9x^2=36-9y^2$

7. $y=\frac{x+4}{y}$

8. $7x^2-8y^2=35$

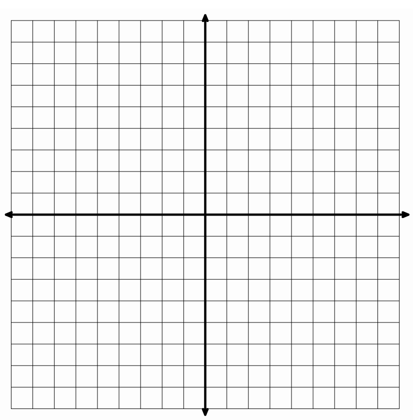
9. $5x^2-2y^2-15=-6y^2+5$

PRÁCTICA

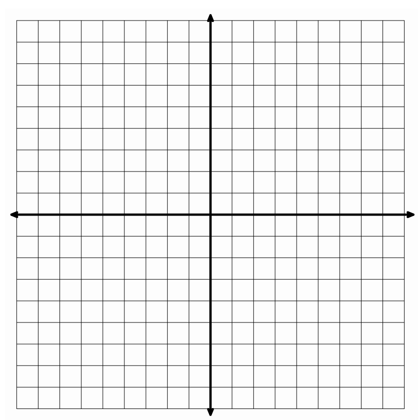
Tema: Representación gráfica de hipérbolas

Escribe la ecuación de las asíntotas. Luego dibuja la gráfica de la ecuación dada.

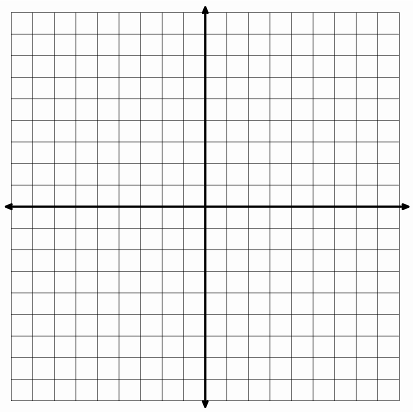
10. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$



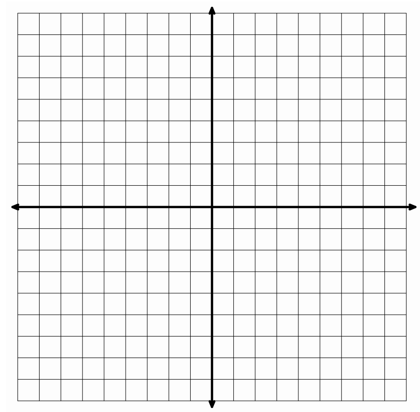
11. $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{25}=1$



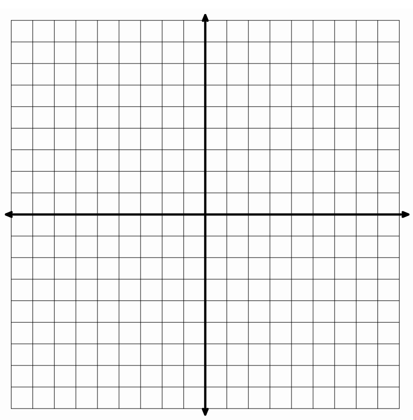
12. $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$



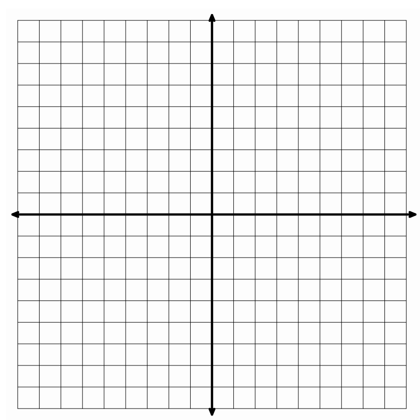
13. $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{36} = 1$



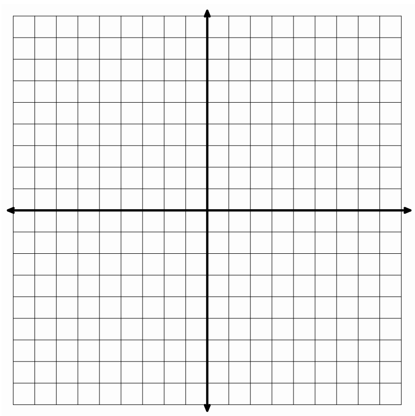
14. $4x^2 - 16y^2 = 64$



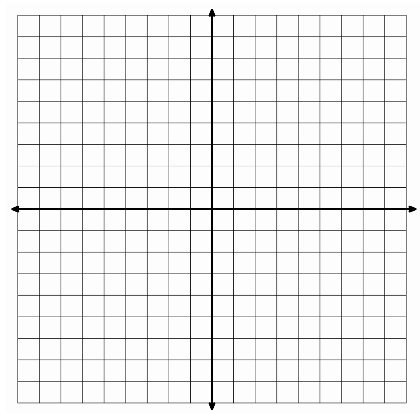
15. $12x^2 - 3y^2 = 48$



16. $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$



17. $\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$



RENDIMIENTO

Tema: Escribir ecuaciones de secciones cónicas en forma estándar

Escribe la ecuación en forma estándar completando el cuadrado. Luego identifica la sección cónica.
Si el cónico es:

- **una parábola, identifica el vértice y escribe la ecuación de la directriz.**
- **un círculo, identifica el centro y el radio.**
- **una elipse, identifica el centro y el radio para el eje horizontal y vertical.**
- **una hipérbola, escribe las ecuaciones de las asíntotas.**

18. $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 1$

19. $16x^2 - 9y^2 - 72y - 288 = 0$

20. $2y^2 - 32x + 20y + 50 = 0$

21. $4x^2 + y^2 + 16x - 6y + 9 = 16$